Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

A ELEVILOR ŞI PROFESORILOR

DIN JUDEŢUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 26, An IX-2008

Editura „Neutrino”
Reşiţa, 2008

Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9481

Mobil: 0724224400
www.neutrino.ro
E-mail: editura@neutrino.ro

CUPRINS

NAPOLEON BONAPARTE
-citate-

■ De la sublim la ridicol nu este decât un pas.

■ Mulţi oameni, ca şi cifrele, capătă valoare numai prin poziţia lor.

■ Capacitatea de a repurta victorii strălucite constă şi în capacitatea, la nevoie, de a suferi înfrângeri.

■ Imposibilul e o fantomă a timizilor şi refugiul laşilor.

■ Iertarea înseamnă a te ridica mai presus decât cei ce te-au insultat.

■ Imaginaţia conduce lumea.

■ Victoria aparţine celui mai perseverent.

■ Fiecare soldat poartă în raniţa sa un baston de mareşal.

■ Caracterul este baza dreptunghiului, iar inteligenţa este înălţimea.

■ Arta de a fi când foarte îndrăzneţ, când foarte prudent este arta de a reuşi.

■ Adevăratele victorii, singurele care nu se lasă cu regrete, sunt cele obţinute în lupta cu ignoranţa.

■ Comandantul trebuie să aibă atât caracter cât şi inteligenţă. Oamenii care au multă inteligenţă şi puţin caracter sunt cei mai puţini indicaţi.

■ Zece oameni care-şi exprimă părerea în public sunt mai puternici decât alte sute de mii care tac.

Ceviene izogonale. Simediane.

Petrişor Neagoe

Definiţie: Spunem că , într-un triunghi *ABC,* două ceviene AA' şi AA'' sunt ceviene *izogonale* dacă $\sphericalangle BAA' \equiv \sphericalangle CAA''$.

Teorema 1 (Steiner). *Fie triunghiul ABC şi punctele* $A', A'' \in BC$ *, astfel încât* AA' *şi* AA'' *sunt izogonale. Atunci* $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{A''B}{A''C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

Demonstraţie:

$\sphericalangle BAA' \equiv \sphericalangle CAA'' \Rightarrow \sphericalangle CAA' \equiv \sphericalangle BAA''$

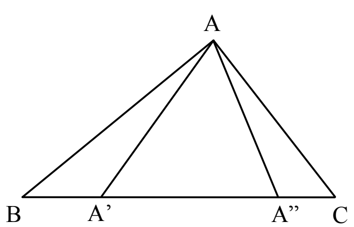
$\sphericalangle AA'B$ şi $\sphericalangle AA'C$ sunt suplementare $\Rightarrow \sin(\sphericalangle AA'B) = \sin(\sphericalangle AA'C)$

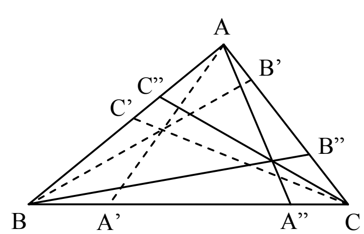
Aplicăm teorema sinusurilor în $\Delta AA'B$ şi $\Delta AA'C$. Deci

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} A'B = \dfrac{AB \cdot \sin(\sphericalangle BAA')}{\sin(\sphericalangle AA'B)} \\ A'C = \dfrac{AC \cdot \sin(\sphericalangle CAA')}{\sin(\sphericalangle AA'C)} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{AB \cdot \sin(\sphericalangle BAA')}{AC \cdot \sin(\sphericalangle CAA')} \\ \qquad\qquad \dfrac{A''B}{A''C} = \dfrac{AB \cdot \sin(\sphericalangle BAA'')}{AC \cdot \sin(\sphericalangle CAA'')} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{A''B}{A''C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \cancel{\frac{\sin(\sphericalangle BAA')}{\sin(\sphericalangle CAA')}} \cdot \cancel{\frac{\sin(\sphericalangle BAA'')}{\sin(\sphericalangle CAA'')}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{A''B}{A''C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$





Teorema 2 : *Izogonalele a trei ceviene concurente sunt concurente.*

Demonstraţie: Fie ΔABC , AA', BB' şi CC' cele trei ceviene concurente şi AA'', BB'' şi CC'' izogonalele lor.

AA', BB' şi CC' sunt concurente. Din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$ (1).

AA' şi AA'' sunt izogonale. Din teorema lui Steiner rezultă că

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{A''B}{A''C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \Rightarrow \frac{A''C}{A''B} = \frac{A'B}{A'C} \cdot \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \quad (2).$$

Analog $\Rightarrow \frac{B''A}{B''C} = \frac{B'C}{B'A} \cdot \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$ şi $\frac{C''B}{C''A} = \frac{C'A}{C'B} \cdot \left(\frac{BC}{AC}\right)^2$ (3).

Din (1), (2) şi (3) $\Rightarrow \frac{A''C}{A''B} \cdot \frac{B''A}{B''C} \cdot \frac{C''B}{C''A} = 1$.

Din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că AA'', BB'' şi CC'' sunt concurente.

Definiţie: Se numeşte *simediană* într-un triunghi izogonala medianei.

Dacă AS este simediană în ΔABC , atunci din teorema lui Steiner rezultă că $\frac{SB}{SC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

Din definiţie şi din teorema 2 rezultă că simedianele unui triunghi sunt concurente. Punctul de concurenţă al simedianelor unui triunghi se numeşte punctul lui Lemoine al triunghiului şi se notează cu K .

Definiţie: O dreaptă taie laturile AC, AB ale triunghiului ABC în B', C' . Dacă $\sphericalangle AB'C' \equiv \sphericalangle ABC$, atunci spunem că dreapta $B'C'$ este *antiparalelă* cu BC . Evident, în acest caz, $\sphericalangle AC'B' \equiv \sphericalangle ACB$.

Teorema 3 (Lhuilier). *Într-un triunghi simediana unui vârf este locul geometric al mijloacelor antiparalelelor la latura opusă.*

Demonstraţie:

Fie triunghiul ABC şi antiparalela $B'C'$. Fie B'', C'' simetricele punctelor B', C' în raport cu bisectoarea $\sphericalangle A$. Deoarece $\Delta AB'C' \equiv \Delta AB''C''$ $\Rightarrow \sphericalangle AB''C'' \equiv \sphericalangle AB'C' \equiv \sphericalangle ABC$, deci $B''C'' \parallel BC$.

Locul geometric al mijloacelor segmentelor paralele cu o latură a unui triunghi şi cu capetele pe celelate două laturi este mediana triunghiului corespunzătoare laturii paralele cu segmentele.

Deoarece mijlocul segmentului $(B'C')$ se transformă în mijlocul segmentului $(B''C'')$, rezultă că locul geometric al mijloacelor

antiparalelelor cu latura (BC) este simetrica medianei față de bisectoarea corepunzătoare unghiului $\sphericalangle A$, adică simediana din vârful A.

Teorema 4. *Tangentele la cercul circumscris unui triunghi în capetele unei laturi se intersectează pe simediana vârfului opus.*

Demonstrație:

Fie triunghiul ABC și A' punctul de intersecție al tangentelor la cercul circumscris $\triangle ABC$ în vârfurile B și C. Să demonstrăm că AA' este simediana vârfului A.

Evident $[A'B]\equiv[A'C]$, deci triunghiul $\triangle A'BC$ este isoscel și

$m(\sphericalangle A'BC)=m(\sphericalangle A'CB)=m(\sphericalangle A)$

Fie $B''\in AB, C''\in AC$ astfel încât $[A'B'']\equiv[A'B]$ și $[A'C'']\equiv[A'C]$.

$$\left.\begin{array}{l}[A'B'']\equiv[A'B]\Rightarrow\triangle A'B''B-\text{isoscel}\Rightarrow\sphericalangle A'B''B\equiv\sphericalangle A'BB''\equiv\sphericalangle C\\ [A'C'']\equiv[A'C]\Rightarrow\triangle A'C''C-\text{isoscel}\Rightarrow\sphericalangle A'C''C\equiv\sphericalangle A'CC''\equiv\sphericalangle B\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow m(\sphericalangle AB''A')+m(\sphericalangle AC''A')+m(\sphericalangle A)=180\Rightarrow B'',A',C''$ sunt coliniare și $B''C''$ este antiparalelă cu BC.

$[A'B'']\equiv[A'B]\equiv[A'C]\equiv[A'C'']\Rightarrow A'$ este mijlocul lui $[B''C'']$.

Rezultă că AA' este simediana vârfului A.

Analog se arată pentru simedianele BB' și CC' din vârfurile B și C.

Simedianele într-un triunghi sunt concurente în punctul lui Lemoine, deci $AA'\cap BB'\cap CC'=\{K\}$

Să obsevăm că cercul circumscris ΔABC este cerc înscris în $\Delta A'B'C'$, unde A,B,C sunt punctele de contact ale cercului cu laturile $\Delta A'B'C'$.

Cum AA',BB',CC' sunt concurente rezultă că punctul de concurență este punctul lui Gergonne al $\Delta A'B'C'$. Deci punctul lui Lemoine (K) al ΔABC este punctul lui Gergonne al $\Delta A'B'C'$.

Probleme rezolvate

1. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și I intersecția diagonalelor. Să se demonstreze că AI este simediană în ΔDAB dacă și numai dacă $AC\cdot BD=2\cdot AB\cdot CD$.

Soluție: Să reamintim relația lui Ptolemeu într-un patrulater inscriptibil:

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$$

"$\Rightarrow$" AI este simediană în $\Delta DAB\Rightarrow\dfrac{IB}{ID}=\left(\dfrac{AB}{AD}\right)^2$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{IB}{IA}=\dfrac{BC}{AD}\\ \dfrac{ID}{IA}=\dfrac{CD}{AB}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{IB}{ID}=\frac{BC}{AD}\cdot\frac{AB}{CD}\Rightarrow\frac{A\cancel{B}}{\cancel{A}D}\cdot\frac{BC}{CD}=\left(\frac{AB}{AD}\right)^{\cancel{2}}\Rightarrow\frac{BC}{CD}=\frac{AB}{AD}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow BC\cdot AD=AB\cdot CD\Rightarrow AB\cdot CD-BC\cdot AD=0\\ \text{Dar } ABCD \text{ inscriptibil}\Rightarrow AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 2\cdot AB\cdot CD=AC\cdot BD$

"$\Leftarrow$" $$\left.\begin{array}{r}2\cdot AB\cdot CD=AC\cdot BD\\ AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD\end{array}\right\}\Rightarrow AB\cdot CD-BC\cdot AD=0\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}AB\cdot CD=BC\cdot AD\Rightarrow\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{CD}\\ \text{Dar }\dfrac{IB}{ID}=\dfrac{AB}{AD}\cdot\dfrac{BC}{CD}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{IB}{ID}=\left(\frac{AB}{AD}\right)^2\Rightarrow$$

$\Rightarrow AI$ - simediană în ΔDAB. □

Observație: Dacă AI este simediană în ΔABD, atunci BI este simediană în ΔABC, CI este simediană în ΔBCD și DI este simediană în ΔCDA.

2. Fie ΔABC, M mijlocul laturii BC și punctele $E\in AB, F\in AC$, astfel încât $\sphericalangle ACE\equiv ABF$. Știind că $\{S\}=AM\cap EF$ să se demonstreze că AS este simediană în ΔAEF.

Soluție: Fie $\{T\}=AS\cap BF$

$$\left.\begin{array}{l}\text{În }\Delta EBF,\text{ transversala } A-T-S\Rightarrow\dfrac{SF}{SE}=\dfrac{AB}{AE}\cdot\dfrac{TF}{TB}\\ \left.\begin{array}{l}\text{În }\Delta BFC,\text{ transversala } T-A-M\Rightarrow\dfrac{TF}{TB}=\dfrac{AF}{AC}\cdot\dfrac{MC}{MB}\\ M\text{ mijlocul lui }[BC]\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{TF}{TB}=\dfrac{AF}{AC}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\dfrac{SF}{SE}=\dfrac{AB}{AE}\cdot\dfrac{AF}{AC}\Rightarrow\dfrac{SF}{SE}=\dfrac{AB}{AC}\cdot\dfrac{AF}{AE}\\ \left.\begin{array}{l}\sphericalangle ABF\equiv\sphericalangle ACE\\ \sphericalangle FAB\equiv\sphericalangle EAC\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta ABF\sim\Delta ACE\Rightarrow\dfrac{AF}{AE}=\dfrac{AB}{AC}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{SF}{SE}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2\Rightarrow$$

$\Rightarrow AS$ este simediană în ΔAEF. □

3.Fie ABC un triunghi oarecare şi AA_1, AA_2 două ceviene izogonale, $A_1, A_2 \in BC$. Considerăm simediana A_1M în ΔAA_1B, $M \in (AB)$ şi simediana A_2N în ΔAA_2C, $N \in (AC)$. Demonstraţi că BN, CM şi simediana din vârful A a ΔABC sunt concurente.

Soluţie: Fie $P \in (BC)$ astfel încât AP este simediană în ΔABC.
AA_1 şi AA_2 ceviene izogonale în $\Delta ABC \Rightarrow \sphericalangle A_1AB \equiv \sphericalangle A_2AC$

$$\left.\begin{array}{l} A_1M \text{ simediană în } \triangle AA_1B \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{A_1A^2}{A_1B^2} \\ A_2N \text{ simediană în } \triangle AA_2C \Rightarrow \dfrac{NC}{NA} = \dfrac{A_2C^2}{A_2A^2} \\ AP \text{ simediană în } \triangle ABC \Rightarrow \dfrac{PB}{PC} = \dfrac{AB^2}{AC^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PB}{PC} =$$

$$= \frac{A_1A^2}{A_1B^2} \cdot \frac{A_2C^2}{A_2A^2} \cdot \frac{AB^2}{AC^2} = \left(\frac{A_1A}{A_2A} \cdot \frac{A_2C}{A_1B} \cdot \frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{A_2C \cdot \sin(\sphericalangle AA_2A_1)}{A_1B \cdot \sin(\sphericalangle AA_1A_2)} \cdot \frac{AB}{AC}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{A_2C \cdot \sin(\sphericalangle AA_2C)}{A_1B \cdot \sin(\sphericalangle AA_1B)} \cdot \frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{\cancel{AC} \cdot \sin(\sphericalangle A_2AC)}{\cancel{AB} \cdot \sin(\sphericalangle A_1AB)} \cdot \frac{\cancel{AB}}{\cancel{AC}}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PB}{PC} = 1 \Rightarrow AP, BN \text{ şi } CM \text{ sunt concurente.}$$

Vă propunem acum spre studiu următoarea problemă:
4.Fie ABC un triunghi oarecare, AA_1, AA_2 două ceviene izogonale, $A_1, A_2 \in BC$ şi I este centrul cercului înscris în $\triangle ABC$. Ştiind că $\{M_1\} = BI \cap AA_1$, $\{M_2\} = BI \cap AA_2$, $\{N_1\} = CI \cap AA_1$, $\{N_2\} = CI \cap AA_2$, $\{P\} = BN_1 \cap CM_2$ şi $\{Q\} = BN_2 \cap CM_1$ să se demonstreze că punctele P, I şi Q sunt coliniare. □

Bibliografie:
1.Mihăileanu, N.N. - Complemente de geometrie sintetică
2.Nicolescu L., Boskoff V. - Probleme practice de geometrie

Profesor, **Grup Şcolar "Mathias Hammer", Anina**

Puncte importante în triunghi
2. Centrul cercului circumscris

Marina Constantinescu, Mircea Constantinescu

Un alt punct care joacă un rol important în geometria triunghiului este centrul cercului circumscris unui triunghi. Admitem cunoscut următorul rezultat:

Teoremă. Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente.

Observaţia 1. Punctul de intersecţie a mediatoarelor laturilor unui triunghi este egal depărtat de vârfurile triunghiului şi se numeşte *centrul cercului circumscris triunghiului.*

Observaţia 2. Dacă triunghiul este ascuţitunghic atunci centrul cercului circumscris se află în interiorul său, dacă triunghiul este obtuzunghic atunci centrul cercului circumscris este situat în exteriorul triunghiului, iar în cazul triunghiului dreptunghic centrul cercului circumscris este chiar mijlocul ipotenuzei.

Folosirea centrului cercului circumscris unui triunghi poate fi utilă atât în probleme care fac referinţă directă la acesta, cât şi în rezolvarea unor probleme în care acesta nu apare explicit în enunţ. Prezentăm în continuare câteva aplicaţii în acest sens.

Problema 1. Fie A, B, C trei puncte distincte, necoliniare în spaţiu. Să se determine mulţimea punctelor M cu proprietatea $MA = MB = MC$.

Soluţie. Fie M astfel încât $MA = MB = MC$ şi O proiecţia lui M pe planul (ABC). Din congruenţa triunghiurilor dreptunghice $MOA, MOB, MOC\,(I.C.)$ rezultă că $OA = OB = OC$, deci O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Deci M se află pe perpendiculara în O pe (ABC). Reciproc, orice punct M al acestei drepte satisface relaţia $MA = MB = MC$, deci mulţimea cerută este perpendiculara pe planul (ABC) în centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Problema 2. Prin vârful A al pătratului $ABCD$ se duce o dreaptă arbitrară care intersectează BC şi CD în E şi F, iar diagonala BD în G. Să se arate că CG este tangentă în C cercului circumscris triunghiului CEF.

Soluţie. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului CEF.
Cum $m(\sphericalangle ECF) = 90^\circ$ deducem că O este mijlocul lui $[EF]$. Problema

revine la a arăta că $OC \perp CG.$ Avem $\sphericalangle OCE \equiv \sphericalangle OEC \equiv \sphericalangle BEA.(1)$

Din congruența triunghiurilor ABG și $CBG(L.U.L.)$ rezultă că $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle BCG.(2)$

Atunci din (1) și (2) obținem că $m(\sphericalangle OCG) = m(\sphericalangle OCE) + m(\sphericalangle BCG) =$

$= m(\sphericalangle BEA) + m(\sphericalangle BAE) = 90^\circ$, deci $OC \perp CG.$

Problema 3. Pe planul triunghiului ascuțitunghic ABC, ducem perpendiculara în vârful A și luăm pe aceasta punctul D. Fie E proiecția lui A pe BD și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că proiecția lui O pe planul (DBC) este centrului cercului circumscris triunghiului EBC.

Soluție. Fie T mijlocul lui $[AB]$. Atunci $OT \perp AB$ și $ET = TA.$ Cum $OT \perp (ABD)$ rezultă că triunghiul OTE este dreptunghic și congruent cu triunghiul $OTA(C.C.)$ Așadar $OE = OA$ și cum $OA = OB = OC$ rezultă că O este egal depărtat de punctele E, B, C. Conform problemei 1 ce obține că proiecția lui O pe (DBC) este centrul cercului circumscris triunghiului BEC.

Problema 4. În triunghiul ascuțitunghic ABC, din mijlocul fiecărei laturi se duc perpendiculare pe celelalte două laturi. Să se arate că aria hexagonului delimitat de aceste perpendiculare este egală cu jumătate din aria triunghiului.

Soluție. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor acestuia

și M, N, P ortocentrele triunghiurilor $A_1BC_1, A_1CB_1, B_1AC_1$ respectiv. Atunci $OA_1 \perp BC$ și deci OA_1NB_1 este paralelogram. Analog OC_1MA_1 și OB_1PC_1 sunt paralograme. Atunci

$$S_{A_1NB_1PC_1M} = 2 \cdot S_{A_1B_1C_1} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABC}.$$

Problema 5. Trei cercuri de aceeași rază, care au un punct comun H, se mai intersectează două câte două în punctele $A, B, C.$ Să se arate că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu razele celorlalte cercuri („Problema piesei de 5 lei” găsită de Gh. Țițeica experimental, la un concurs al Gazetei Matematice, pe când desena cercuri pe o foaie de hârtie cu o piesă de 5 lei).

Soluție. Fie O_1, O_2, O_3 centrele celor trei cercuri. Atunci HO_1BO_3 și HO_2CO_3 sunt romburi, deci $O_2C \parallel O_1B$ și $O_2C = O_1B$, așadar BCO_2O_1 este paralelogram, deci $O_1O_2 = BC.$ Analog $O_1O_3 = AC$ și $O_2O_3 = AB$, deci $\Delta ABC \equiv \Delta O_3O_2O_1 (L.L.L.).$ Cum $HO_1 = HO_2 = HO_3$ obținem că H este centrul cercului circumscris triunghiului $O_1O_2O_3.$ Așadar raza cercului circumscris triunghiului ABC are aceeași lungime cu cea a triunghiului $O_1O_2O_3$, adică cu cea a cercurilor date.

Problema 6. În triunghiul ABC punctul O este centrul cercului circumscris. Prin punctele A și C se duce un cerc tangent la AO și CO. Să se demonstreze că celelalte două puncte de intersecție ale cercului cu dreptele BA și BC sunt extremitățile diametrului său.

Soluție. Să presupunem că triunghiul ABC este ascuțitunghic, deci punctul O este interior triunghiului(pentru celelalte cazuri raționamentele vor fi asemănătoare). Fie O_1 centrul cercului tangent în A și C la AO și CO și A_1, C_1 celelalte puncte de intersecție ale acestui cerc cu BA respectiv BC. Vom arăta că

$m(\sphericalangle AO_1A_1) + m(\sphericalangle AO_1C) + m(\sphericalangle CO_1C_1) = 180^\circ$, de unde va rezulta că punctele A_1, O_1, C_1 sunt coliniare, deci că $[A_1C_1]$ este diametru în cercul de centru O_1.

Avem $m(\sphericalangle AO_1C) + m(\sphericalangle AOC) = 180^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AO_1C) = 180^\circ - 2 \cdot m(\sphericalangle ABC).(1)$

Apoi $m(\sphericalangle AO_1A_1) + m(\sphericalangle CO_1C_1) = 180^\circ - 2 \cdot m(\sphericalangle A_1AO_1) + 180^\circ - 2 \cdot m(\sphericalangle C_1CO_1) =$

$$= 360^\circ - 2 \cdot \left(180^\circ - m(\sphericalangle BAO_1) + 180^\circ - m(\sphericalangle BCO_1)\right) =$$

$$= 360^\circ - 2 \cdot \left(m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle AO_1C)\right) = \text{(conform relației (1))}$$

$$= 360^\circ - 2 \cdot \frac{180^\circ - m(\sphericalangle AO_1C)}{2} - 2 \cdot m(\sphericalangle AO_1C) = 180^\circ - m(\sphericalangle AO_1C),$$

deci $m(\sphericalangle AO_1A_1) + m(\sphericalangle CO_1C_1) + m(AO_1C) = 180^\circ.$

Problema 7. Fie triunghiul isoscel ABC în care $AB = AC.$ Un cerc tangent exterior în M cercului circumscris triunghiului ABC, este tangent de asemenea semidreptelor $(CA$ și $(CB.$ Să se arate că $MC = 2 \cdot MA.$

Soluție. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi O' centrul cercului tangent exterior primului cerc. Fie N,P punctele de tangență ale semidreptelor $(CA,(CB$ cu cercul tangent exterior cercului circumscris triunghiului ABC. Cum AO şi $O'P$ sunt perpendiculare pe CP rezultă că $AO \parallel O'P$ deci $\sphericalangle PO'M \equiv \sphericalangle MOA.$ Deoarece triunghiurile $O'MP$ şi OMA sunt isoscele, deducem că $\sphericalangle O'MP \equiv \sphericalangle AMO$, deci punctele P,M,A sunt coliniare. Pe de altă parte avem $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$, deci $\triangle AMC \sim \triangle ACP$, deci

$\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AC}{AP}$, deci $AC^2 = AM \cdot AP.$ Conform puterii punctului față de cerc avem $AN^2 = AM \cdot AP$, deci

$AC = AN = AB.$ Din asemănarea triunghiurilor CMP şi AMB rezultă $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{CP}{AB}.$ Dar $CP = CN = 2 \cdot AC = 2 \cdot AB$, deci $MC = 2 \cdot MA.$

Problema 8. Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC. Pe prelungirile laturii AC , dincolo de punctul C , laturii CB , dincolo de punctul B, laturii BA , dincolo de punctul A , se iau respectiv punctele B_1, A_1, C_1 astfel încât triunghiul $A_1B_1C_1$ să fie asemenea cu triunghiul ABC. Să se arate că ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$ coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Soluție. Fie H ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$. Atunci $B_1H \perp A_1C_1, C_1H \perp A_1B_1$, deci $m(\sphericalangle B_1HC_1) = \pi - m(\sphericalangle B_1A_1C_1).$ Cum $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B_1A_1C_1$ rezultă că $\sphericalangle B_1HC_1 \equiv \sphericalangle B_1AC_1$, deci punctele B_1, H, A, C_1 sunt conciclice. De aici rezultă că $\sphericalangle CAH \equiv \sphericalangle B_1C_1H.$ Analog $\sphericalangle ABH \equiv \sphericalangle C_1A_1H, \sphericalangle BCH \equiv \sphericalangle A_1B_1H.$ Astfel

$$m(\sphericalangle ACH) = m(\sphericalangle ACB) - m(\sphericalangle BCH) = m(\sphericalangle A_1C_1B_1) - m(\sphericalangle A_1B_1H) =$$
$$= m(\sphericalangle A_1C_1B_1) - m(\sphericalangle A_1C_1H) = m(\sphericalangle B_1C_1H) = m(\sphericalangle CAH)$$

deci $\sphericalangle ACH \equiv \sphericalangle CAH$, aşadar $HA = HC.$ Analog $HA = HB$, deci H este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

În încheiere propunem spre studiu următoarele aplicații:

1.Se consideră un triunghi ABC , cercul său circumscris de centru O şi înălțimea AA' corespunzătoare lui $BC.$ Să se arate că bisectoarea unghiului BAC este şi bisectoarea unghiului $A'AO.$

2.Se consideră un triunghi ABC şi cercul său circumscris de centru O . Se duce înălțimea AD şi se proiectează punctele B şi C pe OA în E respectiv F . Dreptele DE şi DF intersectează AC şi AB respectiv în punctele G şi H . Să se arate că punctele A,D,G,H sunt conciclice (se află pe acelaşi cerc).

3.Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Să se arate că dreptele AO, BO, CO sunt respectiv perpendiculare pe $B'C', C'A'$, $A'B'$, unde A', B', C' sunt picioarele înălțimilor din A,B,C ale ΔABC .

4.Fie A', B', C' simetricele vârfurilor A,B,C ale unui triunghi ABC în raport cu mijloacele laturilor $BC, CA, AB.$ Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor $A'BC, B'CA, C'AB$ trec prin acelaşi punct care este ortocentrul triunghiului ABC .

5.În triunghiul ascuțitunghic ABC se duc AD şi AE astfel încât $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle EAC, D \in (BC), E \in (BC).$ Dacă $AE \perp BC$ şi AD, AE intersectează cercul circumscris triunghiului respectiv în M şi N , să se arate că AD trece prin centrul cercului şi $BDNM$ este paralelogram.

6.Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC , iar $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ respectiv simetricele lui O față de mijloacele segmentelor $[BC], [CA], [AB], [B_1C_1], [C_1A_1], [A_1B_1].$ Să se arate că:

a)dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente;

b)punctele $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ sunt conciclice;

c)dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt concurente.

7.Punctele A,B,C şi D sunt situate pe un cerc cu centrul I . Mediatoarele segmentelor $[AD]$ şi $[BC]$ intersectează dreapta AB în P şi $Q.$ Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor IPQ şi ICD sunt tangente.

Bibliografie:

1.Gh. Țițeica- Probleme de geometrie, Editura Tehnică , Bucureşti.

2. N. Agahanov, O. Podlipsky- Olimpiade matematice ruseşti Moscova 1993-2002, Editura Gil, Zalău.

3. M. Ganga-Probleme elementare de matematică, Mathpress, 2003.

4. Colecția Gazeta Matematică.

Profesoară Grupul Şcolar Industrial Tismana

Profesor Colegiul Național Ecaterina Teodoroiu Tg-Jiu

Metode de rezolvare a problemelor cu unghiuri în spațiu (II)

Maria Iancu

M4). Dacă dreapta d este perpendiculară pe un plan ce conține dreapta g, atunci cele două drepte sunt perpendiculare şi măsura unghiurilor lor este de 90^0 (reamintim că o dreaptă este perpendiculară pe un plan, dacă acea dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente din acel plan).

M5). Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan ce conține dreapta g şi alt plan ce conține dreapta d „taie" primul plan chiar după drepta g, atunci dreptele d şi g sunt paralele şi măsura unghiurilor lor este de zero grade (reamintim că o dreaptă este paralelă cu un plan, dacă ea este paralelă cu o dreaptă conținută în acel plan).

Unghiul unei drepte cu un plan

Definiție. Se numeşte unghiul unei drepte d cu un plan α, unghiul lui d cu proiecția ortogonală a lui d pe α. Dacă dreapta d este perpendiculară pe un plan, atunci unghiul dintre dreaptă şi plan este, prin definiție, un unghi drept. Dacă dreapta d este paralelă cu un plan sau este conținută în acel plan, atunci măsura unghiului dintre ea şi plan are 0^0 şi reciproc; măsura unghiului dintre o dreaptă şi un plan este un număr cuprins în intervalul închis $\left[0^0, 90^0\right]$.

Proprietăți.

P1). Unghiul unei drepte cu un plan este cuprins între 0^0 şi 90^0.

P2). Unghiul unei drepte cu un plan este cel mai mic dintre unghiurile formate de acea dreaptă cu o dreaptă oarecare a planului.

P3). Unghiul dintre o dreaptă şi un plan este complementar unghiului dintre acea dreaptă şi o perpendiculară pe acel plan. Aceasta poate fi luată şi ca definiție.

Metode. Determinarea unghiului unei drepte cu un plan poate fi operată prin mai multe metode:

M1). Dacă dreapta d "înțeapă" planul α într-un punct A, se consideră un punct convenabil de pe d, B sau în planul α, C a cărui proiecție pe planul α, B_1, se poate preciza uşor în contextul problemei (care este proiecția punctului C_1 de pe dreapta d).

M2). Se identifică două puncte distincte pe dreapta d, A şi B ale căror proiecții pe planul α, A_1 şi B_1 se pot identifica cu uşurință.

Şi în rezolvarea acestui tip de probleme se impune parcurgerea obligatorie a unor etape :

(E1). Proiectarea dreptei pe plan.

(E2). Precizarea unghiului dintre dreaptă şi plan.

(E3). Determinarea unghiului cu ajutorul elementelor unui triunghi.

Exemple.

B_1) În cubul $ABCDA'B'C'D'$, M şi N sunt mijloacele segmentelor (AB), respectiv $(C'D')$ şi $MN = 2a\sqrt{2}$. Aflați tangenta trigonometrică a unghiului dintre (MN) şi planul $(A'AB)$.

Soluție

(E₁) : Fie P mijlocul lui $(A'B')$. Deoarece $NP \parallel B'C'$ şi $B'C' \perp (ABB') \Rightarrow NP \perp (ABB') \Rightarrow pr_{(ABB')}NM = PM$.

(E₂): $\sphericalangle(NM;(A'AB)) \equiv \sphericalangle(NM;PM) \equiv \sphericalangle PMN$.

(E₃) : ΔPMN : $PN = PM \Rightarrow$ ΔPMN este dreptunghic isoscel şi deci $tg(\sphericalangle PMN) = 1 \Rightarrow tg(\sphericalangle(NM;(A'AB))) = 1$.

B_2) Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$, M mijlocul muchiei (CD) şi $A'M = 3cm$.

Aflați: a) măsura unghiului format de dreapta $A'M$ cu planul (ABC);

b) tangenta trigonometrică a unghiului format de $A'M$ cu planul $(A'AD)$.

*Soluție.*Considerăm muchia cubului $\boldsymbol{x}$.

a) **(E₁)** :Proiecția lui $A'M$ pe planul (ABC) este AM.

(E₂) : $\sphericalangle(A'M;(ABC)) \equiv \sphericalangle(A'M;AM) \equiv \sphericalangle A'MA$.

(E₃) : $\Delta A'AM$: $tg(\sphericalangle A'MA) = \dfrac{A'A}{AM}$ (1).

Cu Teorema lui Pitagora în $\Delta ADM \Rightarrow AM^2 = x^2 + \dfrac{x^2}{4}$ (2), analog în

$\Delta A'AM \ \Rightarrow x = 2$ sau $A'A = 2$ $,\Rightarrow AM = 5$ şi $tg\left(\sphericalangle A'MA\right) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) **(E_1):**Proiecţia lui $A'M$ pe planul$\left(ADD'\right)$ este $A'D$.

(E_2): $\sphericalangle\left(A'M;\left(ADD'\right)\right) \equiv \sphericalangle\left(A'M;A'D\right) \equiv \sphericalangle MA'D$

(E_3): $\Delta MDA' \Rightarrow tg\left(\sphericalangle MA'D\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \ tg\left(\sphericalangle\left(A'M;\left(A'DA\right)\right)\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

$B_3)$ Pe planul hexagonului regulat $ABCDEF$ de latură a cm, în mijlocul M al diagonalei $\left(AC\right)$ se ridică, pe planul hexagonului, perpendiculara VM , astfel încât $VM = \dfrac{a}{2}$. Se cer măsurile unghiurilor determinate de VA şi VB cu planul hexagonului.

Soluţie.

(E_1): Proiecţiile lui VA , respectiv VB pe planul $\left(ABC\right)$ sunt MA , respectiv MB .

(E_2): $\sphericalangle\left(VA;\left(ABC\right)\right) \equiv \sphericalangle\left(VA;MA\right) \equiv \sphericalangle VAM$.

$\sphericalangle\left(VB;\left(ABC\right)\right) \equiv \sphericalangle\left(VB;MB\right) \equiv \sphericalangle VBM$ **.**

(E_3) :Dacă O este centrul hexagonului $\Rightarrow OA = AB = BC = CO$

$\Rightarrow OABC =$ romb $\Rightarrow OB \perp AC \ \Rightarrow OM = \dfrac{OB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

$$\Delta VMB \Rightarrow tg\left(\sphericalangle VBM\right) = \frac{VM}{BM} = 1 \Rightarrow m\left(\sphericalangle VBM\right) = 45^0 \Rightarrow m\left(\sphericalangle\left(VB;\left(ABC\right)\right)\right) = 45^0$$

Aplicând Teorema cosinusului în $\Delta ABC \Rightarrow \ AC = a\sqrt{3} \ \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Delta VMA \ : \ tg\left(\sphericalangle VAM\right) = \frac{VM}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m\left(\sphericalangle VAM\right) = 30^0$$

$\Rightarrow m\left(\sphericalangle\left(VA;\left(ABC\right)\right)\right) = 30^0$.

(Va urma)

Profesor, Şcoala "Romul Ladea", Oraviţa

Un grup de matrice cu elementele 0 şi 1

Romelia şi Constantin Scheau

Fie M mulţimea matricelor pătratice de ordin n, cu toate elementele din mulţimea numerelor naturale.

Ne interesează în ce condiţii o matrice inversabilă $X \in M$, are inversa $X^{-1} \in M$.

Vom nota cu M_1 multimea matricelor pătratice de ordinul n care au pe fiecare linie şi pe fiecare coloană un singur element egal cu 1 iar celelalte elemente nule.

Propoziţie 1. Fie $X \in M$. Urmatoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) X matrice inversabilă şi $X^{-1} \in M$

b) $X^{-1} \in M_1$

Demonstraţie:

a)$\Rightarrow$b) Fie $X = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $X \in M$ si $X^{-1} = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $X^{-1} \in M$

Rezultă $a_{ij}, b_{ij} \in N, \forall i, j = \overline{1,n}$.

Matricea X este inversabilă cu inversa $X^{-1} \Rightarrow X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = I_n$

$X \cdot X^{-1} = I_n \Rightarrow$

$$(1)\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} = 1 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k3} = 0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn} = 0 \end{cases} \quad (2)\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} = 1 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k3} = 0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kn} = 0 \end{cases} \quad \ldots(n)\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k1} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k2} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k3} = 0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn} = 1 \end{cases}$$

Adunând egalităţile din sistemul (1) obţinem:

$$a_{11}\sum_{k=1}^{n} b_{1k} + a_{12}\sum_{k=1}^{n} b_{2k} + \ldots + a_{1n}\sum_{k=1}^{n} b_{nk} = 1 \quad (1.1)$$

Arătăm că $\forall i=\overline{1,n}, \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \neq 0$

Presupunem contrariul că $\exists i=\overline{1,n}$ astfel încât $\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} b_{ik}=0 \\ \text{Cum } b_{ik} \in N,\ \forall k=\overline{1,n}\end{array}\right\}$

$\Rightarrow b_{ik}=0, \forall k=\overline{1,n} \Rightarrow \det(X^{-1})=0,$ absurd pentru că X^{-1} este matrice inversabilă. Deci $\forall i=\overline{1,n}, \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \neq 0 \quad (1.2)$

Din (1.1) si (1.2) $\Rightarrow$ există un singur element $i \in \{1,2,..n\}$, astfel încât $a_{1i} \neq 0,$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow a_{1i}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}=1 \\ a_{1i}, b_{ik} \in N\end{array}\right\} \Rightarrow a_{1i}=1 \text{ si } \sum_{k=1}^{n} b_{ik}=1$$

$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}=1$ si $a_{1k} \in N,\ \forall k=\overline{1,n} \Rightarrow$ prima linie a matricei X are un element egal cu 1, celelalte elemente fiind egale cu 0.

Analog se procedează şi pentru celelalte linii ale matricei X folosindu-se sistemele (2), (3) …(n) de unde rezultă că pe fiecare linie din X se află un singur element egal cu 1, celelalte fiind egale cu 0.

Arătăm în continuare că pe fiecare coloană din X se află un singur element egal cu 1 şi celelalte elemente sunt nule.

Presupunem contrariul, că

$\exists k \in \{1,2,..n\}$ astfel încât $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \neq 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{kj}=0$ sau $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \geq 2$

Daca $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}=0,$ cu $a_{kj} \in N,\ \forall k, j=\overline{1,n} \Rightarrow$ matricea X are pe coloana k toate elementele egale cu 0 $\Rightarrow$det(X)=0 în contradicție cu X matrice inversabilă.

Dacă $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \geq 2,$ cum $a_{kj} \in N, \forall k, j=\overline{1,n}$ şi am demostrat că fiecare linie a matricei X are câte un element egal cu 1, celelalte fiind egale 0, rezultă că există cel puțin două linii egale, rezultă că det(X)=0, contradicție cu X matrice inversabilă.

b$\Rightarrow$ a) Fie $X^{-1} \in M_1$, evident X matrice inversabilă şi $M_1 \subset M \Rightarrow X^{-1} \in M$.

Observație. Pentru $n=3$ implicația a)$\Rightarrow$b) se găseşte printre subiectele de bacalaureat iunie-iulie 2007, proba D, M1-1, filiera teoretică, specializarea matematică –informatică, varianta 3, subiectul III, punctul g).

Propoziție 2. Multimea M_1 împreuna cu înmulțirea matricelor formează o structură de subgrup al grupului $(GL(n,R),\cdot)$, unde $GL(n,R)=\{A \in M_n(R)/\det(A) \neq 0\}$.

Demonstrație: Arătăm :

$a)\ \forall A,B \in M_1 \Rightarrow A \cdot B \in M_1$

$b)\ \forall A \in M_1 \Rightarrow A^{-1} \in M_1$

a) Fie $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $A \in M_1$ si $B=(b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $B \in M_1$,

$C=A \cdot B,$ unde $C=(c_{ij})_{\mathrm{i,j}=\overline{1,n}} \Rightarrow c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\ \ \forall \mathrm{i,j}=\overline{1,n}$

$\Rightarrow c_{ij} \in \{0,1\}$, deoarece pe linia i a matricei A şi pe coloana j a matricei B se află un singur element egal cu 1, celelalte fiind nule.

$$\forall i=\overline{1,n} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1}+\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2}+\ldots+\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kn}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{k1}+b_{k2}+\ldots+b_{kn})=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}=1$$

$\Rightarrow C$ are pe fiecare coloană un singur element egal cu1 , celelalte fiind nule.Analog C are pe fiecare linie un singur element egal cu1 , celelalte fiind nule.$\Rightarrow C \in M_1 \Rightarrow A \cdot B \in M_1$.

b) Fie $A \in M_1$. Prin eventual m (m $\in N^*$), interschimbări de linii, A se poate transforma în I_n, deci $\det(A)=(-1)^m \neq 0$ şi A este inversabilă.

Din $A^{-1} \cdot A=I_n,$ analog ca la demonstrația $a) \Rightarrow b)$ din prop.1

$\Rightarrow A^{-1} \in M_1$. Din a) şi b) $\Rightarrow (M_1,\cdot)$ este subgrup al grupului $(GL(n,R),\cdot)$

Propoziție 3. Grupul $(M_1, \cdot)$ este izomorf cu grupul permutarilor de gradul n, $(S_n, \circ)$.

Demonstrație: Fie $f : S_n \to M_1$, $f(\sigma) = A_\sigma$, $A_\sigma = (a_{ij}^\sigma)_{i,j=\overline{1,n}}$, unde

$$a_{ij}^\sigma = \begin{cases} 1, \text{ daca } i = \sigma(j) \\ 0, \text{ daca } i \neq \sigma(j) \end{cases} \quad \forall i, j = \overline{1,n}$$

Vom arăta că f este izomorfism de grupuri.

Fie

$$f(\sigma) = f(\tau) \Rightarrow A_\sigma = A_\tau \Rightarrow a_{ij}^\sigma = a_{ij}^\tau, \forall i, j = \overline{1,n}$$

$\Rightarrow i = \sigma(j) = \tau(j),\ \forall j = \overline{1,n} \Rightarrow \sigma = \tau \Rightarrow f$ injectiva.

Fie $B \in M_1$ si $\sigma \in S_n$ cu $\sigma(i)$=numărul liniei matricei B în care se află elementul 1 de pe coloana i, $i = \overline{1,n}$. Rezultă că $f(\sigma) = B$, deci f este surjectivă.Arătăm în continuare că f este morfism de grupuri, adică $\forall \sigma, \tau \in S_n$, f($\sigma\tau$)=$A_\sigma \cdot A_\tau \Leftrightarrow A_{\sigma\tau} = A_\sigma \cdot A_\tau$.

$$a_{ij}^{\sigma\tau} = \begin{cases} 1, \text{ daca } i = \sigma\tau(j) \\ 0, \text{ daca } i \neq \sigma\tau(j) \end{cases} \quad \forall i, j = \overline{1,n}$$

Fie $B = A_\sigma \cdot A_\tau$, $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \Rightarrow b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^\sigma \cdot a_{kj}^\tau =$

$$= \begin{cases} 1 \text{ daca } i = \sigma(k) \text{ si k}=\tau(\text{j}) \\ 0 \text{ daca } i \neq \sigma(k) \text{ sau k} \neq \tau(\text{j}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ daca } i = \sigma\tau(j) \\ 0 \text{ daca } i \neq \sigma\tau(j) \end{cases} \Rightarrow b_{ij} = a_{ij}^{\sigma\tau},\ \forall i, j = \overline{1,n} \Rightarrow A_{\sigma\tau} = A_\sigma \cdot A_\tau.$$

$\Rightarrow f$ este izomorfism de grupuri.

Profesor,
Liceul Teoretic "Al. I. Cuza",
Ploiești

Profesor,
Colegiul Național "Mihai Viteazul", Ploiești

Două teoreme de concurență la patrulatere.

Nicolae Stăniloiu

Vom face la început pentru ușurința expunerii câteva convenții. Deasemenea vom reaminti câteva teoreme utile în redactarea materialului de față. Fie K un punct aparținând segmentului [AB]. Vom nota: $\alpha_{AB}^K = \frac{AK}{KB}$ iar atunci când între A și B nu mai avem fixate și alte puncte vom nota pur și simplu: $\alpha_{AB} = \frac{AK}{KB}$.

Observație: Este evident că $\alpha_{AB}^K \cdot \alpha_{BA}^K = 1$. Cu aceste notații putem să reamintim:

Teorema lui Ceva: Fie ABC un triunghi și $A_1 \in [BC], B_1 \in [AC], C_1 \in [AB]$. Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt trei drepte concurente dacă și numai dacă: $\alpha_{AB} \cdot \alpha_{BC} \cdot \alpha_{CA} = 1$. (1)

Observație: Se observă că relația (1) este echivalentă cu relația: $\alpha_{AB} \cdot \alpha_{BC} = \alpha_{AC}$ ceea ce poate constitui o "regula" de înmulțire a acestui tip de rapoarte.

În teorema lui Ceva am considerat doar cazul când toate punctele sunt in interiorul laturilor însă rezultatele care urmează nu vor fi influențate de această condiție. Vom mai reaminti și teorema lui Van Aubel:

Teorema Van Aubel : Fie ABC un triunghi și AA_1, BB_1, CC_1 trei drepte concurente în punctul K, conform cu figura 1.

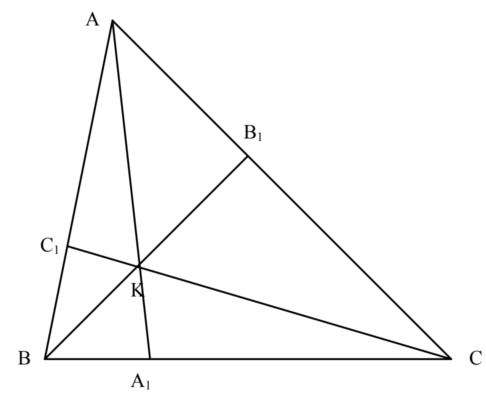


Fig. 1.

În aceste condiții: $\alpha_{AA_1} = \alpha_{AB} + \alpha_{AC}$.

Vom trece acum la enunțarea primei teoreme de concurență:

Teorema 1: Fie ABCD un patrulater. Dacă M, N, P, Q, R, S sunt puncte respectiv pe segmentele: [AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD] astfel încât cevienele corespunzătoare din triunghiurile ABC, BCD şi CDA sunt concurente atunci şi cevienele din triunghiul DAB sunt concurente (fig 2).

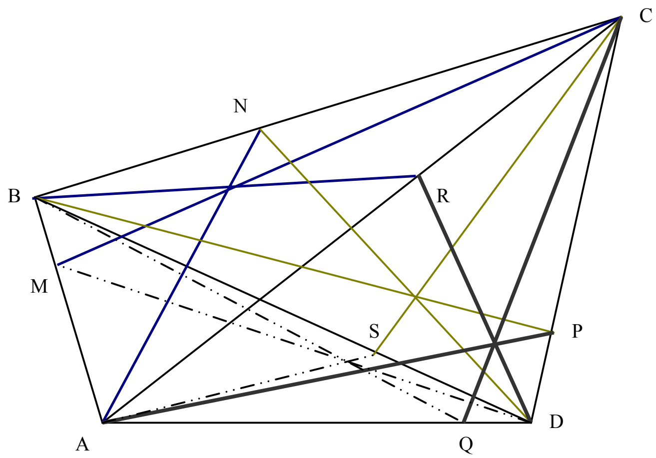


Fig. 2

***Demonstrație*:** Cu notațiile anterioare vom scrie că:

$$\begin{cases} \alpha_{AB} \cdot \alpha_{BC} \cdot \alpha_{CA} = 1 \\ \alpha_{BC} \cdot \alpha_{CD} \cdot \alpha_{DB} = 1 \text{ şi va trebui să demonstrăm că: } \alpha_{DA} \cdot \alpha_{AB} \cdot \alpha_{BD} = 1 \\ \alpha_{CD} \cdot \alpha_{DA} \cdot \alpha_{AC} = 1 \end{cases}$$

Din relațiile anterioare rezultă exprimările:

$\alpha_{DA} = \alpha_{DC} \cdot \alpha_{CA}$, $\alpha_{AB} = \alpha_{CB} \cdot \alpha_{AC}$, $\alpha_{BD} = \alpha_{BC} \cdot \alpha_{CD}$ care conduc imediat la rezultat.

Teorema 2: Fie ABCD un patrulater. Dacă M, N, P, Q, R, S sunt puncte respectiv pe segmentele: [AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD] astfel încât cevienele corespunzătoare din triunghiurile ABC, BCD şi CDA şi DAB sunt concurente respectiv în punctele: K_D, K_A, K_B, K_C atunci dreptele AK_A, BK_B, CK_C, DK_D sunt concurente. (fig. 3)

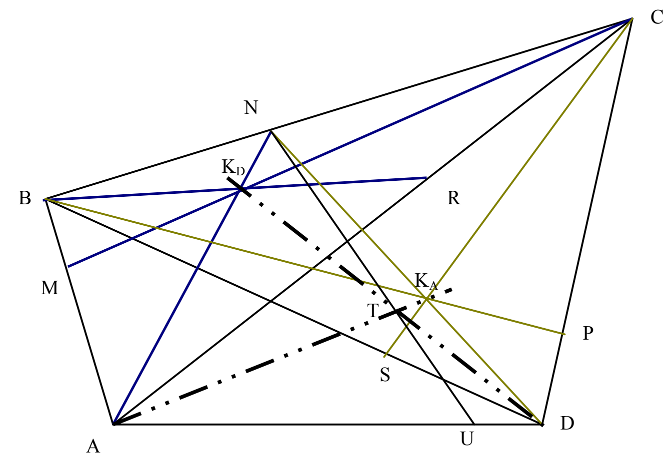


Fig. 3

***Demonstrație*:** Am considerat o figură simplificată intenția fiind aceia de a arăta că segmentul [AK_A] este tăiat de segmentele de la vârfurile vecine (DK_D şi BK_B) în acelaşi raport fapt care ne conduce la concluzia ca oricare trei din cele 4 segmente sunt concurente şi de aici concluzia că toate cele 4 drepte sunt concurente.

Cu notațiile anterioare şi cele din figura 3 vom avea conform cu teorema lui Van Aubel:

$\alpha_{AN} = \alpha_{AB} + \alpha_{AC}$ şi $\alpha_{DN} = \alpha_{DC} + \alpha_{DB}$. Referindu-ne strict la triunghiul AND vom putea scrie:

$$\alpha_{AK_A} = \alpha_{AN} + \alpha_{AD} = \alpha_{AN} + \alpha_{AN} \cdot \alpha_{ND} = \alpha_{AN} + \frac{\alpha_{AN}}{\alpha_{DN}} = \alpha_{AN}\left(\frac{1+\alpha_{DN}}{\alpha_{DN}}\right)$$

sau:

$$\alpha_{AK_A} = \frac{(\alpha_{AB} + \alpha_{AC})(1 + \alpha_{DC} + \alpha_{DB})}{\alpha_{DC} + \alpha_{DB}} =$$

sau:

$$= \frac{(\alpha_{AD} \cdot \alpha_{DB} + \alpha_{AD} \cdot \alpha_{DC})(1 + \alpha_{DC} + \alpha_{DB})}{\alpha_{DC} + \alpha_{DB}} = \alpha_{AD}(1 + \alpha_{DC} + \alpha_{DB})$$

$\alpha_{AK_A} = \alpha_{AD} + \alpha_{AD} \cdot \alpha_{DC} + \alpha_{AD} \cdot \alpha_{DB} = \alpha_{AD} + \alpha_{AC} + \alpha_{AB}$ (2).

Relația precedentă ne spune că segmentul DK_D taie segmentul AK_A într-un raport egal cu suma rapoartelor care pleaca din vârful A proprietate

care o va avea evident şi segmentul BK_B şi deci segmentele AK_A, BK_B şi DK_D sunt concurente şi conform cu observaţiile de la început rezultă concluzia.

Observaţie: Relaţia: $\alpha_{AK_A} = \alpha_{AD} + \alpha_{AC} + \alpha_{AB}$ ar putea fi privita ca o relaţie de tip Van Aubel pentru patrulatere.

Teorema precedentă este valabilă şi în spaţiu adică se poate spune că:

Propoziţie: Dacă M, N, P, Q, R, S sunt 6 puncte respectiv pe laturile: [AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD] ale unui tetraedru ABCD astfel încât cevienele corespunzătoare din fetele ABC, BCD şi CDA şi DAB sunt concurente respectiv în punctele: K_D, K_A, K_B, K_C atunci dreptele AK_A, BK_B, CK_C, DK_D sunt concurente.

Demonstraţia în spaţiu este foarte simplă pentru că în spaţiu oricare două din cele 4 drepte sunt concurente şi oricare 3 sunt necoplanare de unde rezultă ca toate 4 vor fi concurente. Rămâne însă de interes relaţia Van Aubel pentru tetraedru care are o exprimare asemănătoare cu relaţia (2).

Profesor, Liceul Tata Oancea, Bocşa

Numere prime

Adriana şi Lucian Dragomir

Definiţie: În mod uzual, un număr natural $p > 1$ se numeşte prim dacă are doar doi divizori naturali: 1 şi *p*.

Altfel spus, dacă există $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $p = a \cdot b$, atunci $a = 1$ sau $b = 1$ (celălalt factor fiind p).

Să mai amintim că un număr natural $n > 1$ se numeşte compus dacă există $a, b \in \mathbb{N}$, $a > 1, b > 1$, astfel încât $n = a \cdot b$ (adică *n* nu este prim).

● Se ştie că există o infinitate de numere prime.Pentru eleganţa demonstraţiei, merită să o redăm aici pe cea obţinută de Euclid, chiar dacă mulţi dintre cititori o cunosc: Se consideră numerele prime $p_1 < p_2 < ... < p_n < ...$ (Evident, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, ...$) şi ne propunem să arătăm că şirul este infinit, adică indiferent cât de mare este p_n, putem găsi un număr prim mai mare.Considerând numărul $N = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$, avem că el este mai mare decât p_n;dacă *N* este chiar prim, problema s-a încheiat, iar dacă *N* nu este prim, el se divide printr-un număr prim, pe care îl notăm cu, de exemplu, *q*.Pe de altă parte, prin împărţirea lui *N* la oricare dintre numerele prime $p_1, p_2, ... < p_n$, obţinem de fiecare dată restul 1, aşadar *q* este un alt număr prim, mai mare decât p_n.Demonstraţia s-a încheiat acum.(Să remarcăm că nu ştim dacă numărul *N* este sau nu prim).

● Cum testăm dacă un număr este prim? Un prim procedeu este cel cunoscut sub numele de “ciurul “ lui Eratostene: împărţim numărul *n* la 2.Dacă se împarte exact, numărul nu e prim şi testul s-a încheiat.Dacă nu, încercăm cu 3 , apoi cu 5 (peste 4 sărim: dacă *n* nu se divide cu 2, atunci nu se divide nici cu 4),…Continuăm procedeul şi dacă ajungem la $\sqrt{n}$ fără ca *n* să aibă divizori (în afară de 1 şi el însuşi), atunci *n* este număr prim. Evident, procedeul este însă inaplicabil pentru numere mari, chiar şi cu ajutorul calculatoarelor. Există astăzi metode sofisticate de testare, dar o întrebare naturală ar fi aici: la ce foloseşte atâta efort, pentru ce atâtea căutări ?

Pentru mulţi dintre elevi(şi poate nu numai) care pun adeseori astfel de întrebări legate de utilitatea matematicii, avem cel puţin un răspuns uimitor: descompunerea în factori primi ai unui număr constituie cheia unor coduri criptografice, adică a unor coduri secrete de transmitere a datelor, problemă cu care s-au confruntat din cele mai vechi timpuri şi până azi armatele, conducătorii lor, serviciile de spionaj, marile companii,etc.

●Să revenim la matematică prin sublinierea unor rezultate des utilizate în domeniu:

1) Dacă p este un număr prim şi $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât p / ab, atunci p / a sau p / b. **(Euclid)**

2) Dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$ şi a / bc, iar $(a, b) = 1$, atunci a / c.

3) Orice număr prim $p > 3$ este de forma $6k \pm 1, k \in \mathbb{N}$.

4) Orice număr natural poate fi reprezentat în mod unic sub forma $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_m^{k_m}$, unde $p_1, p_2, ..., p_m$ sunt numere prime, iar $k_1, k_2, ..., k_m$ numere naturale nenule.**(Teorema fundamentală a aritmeticii)**

Numărul divizorilor numărului natural n este astfel dat de $d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot ... \cdot (k_m + 1)$.

5) Dacă p este număr prim, atunci $\forall a \in \mathbb{N}$ nedivizibil cu p avem $a^{p-1} \equiv 1 (mod p)$, adică a^{p-1} dă restul 1 prin împărţire la *p*. **(Fermat)**

6) Exponentul unui număr prim p în descompunerea în factori primi ai lui $n!$ este $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+...+\left[\frac{n}{p^k}\right]+...$ **(Legendre)**

7) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, între numerele n şi $2n$ se află cel puţin un număr prim. **(Bertrand)**

8) Un număr natural p este prim dacă şi numai dacă $(p-1)!+1 \equiv 0 (\text{mod } p)$ **(Wilson)**

● Probleme rezolvate:

1) Să se arate că dacă suma a două numere naturale nenule este un număr prim, atunci cele două numere sunt prime între ele.

(OJ Buzău, 1994)

Soluţie: Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$ şi $n = p+q$ număr prim; dacă p şi q nu sunt prime între ele, înseamnă că există $d = (p,q) \neq 1$, adică $p = dr, q = ds$, cu $r, s \in \mathbb{N}$ .Deducem că $p+q = d(r+s) = n \Rightarrow d / n$, contradicţie cu faptul că n este prim. □

2) Există numere prime de trei cifre astfel încât produsul cifrelor fiecărui număr să fie 180 ?

(OL Brăila, 1994)

Soluţie: Răspunsul este negative, deoarece cifrele unui astfel de numere nu pot fi decât 5, 4 şi 9, aşadar numărul este divizibil cu 9, deci nu poate fi prim. □

3) Să se determine numerele naturale n pentru care $2^n - 1$ şi $2^n + 1$ sunt simultan prime.

(Concurs Traian Lalescu, 1993)

Soluţie: Numerele $2^n - 1$, 2^n şi $2^n + 1$ sunt consecutive, deci unul dintre ele este multiplu de 3.Acesta nu poate fi evident 2^n, dacă $2^n + 1$ este multiplu de 3, fiind prim, nu poate fi decât 3, deci $n = 1$, dar atunci primul număr este 1.Singura posibilitate este aşadar $2^n - 1 = 3 \Rightarrow n = 2$ (cele două numere sunt într-adevăr prime: 3 şi 5). □

4) Să se determine numerele naturale p astfel încât numerele p, p^2+4, p^2+6 să fie numere prime.

(OJ Galaţi, 1994)

Soluţie: Evident, p este număr impar.Dacă ultima sa cifră este 1 sau 9, atunci p^2+4 este multiplu de 5, iar dacă ultima cifră a lui p este 3 sau 7, atunci p^2+6 este multiplu de 5. Avem astfel unica posibilitate: p are ultima cifră 5 şi, fiind prim, $p = 5$ (în acest caz verificăm că şi celelalte numere sunt prime!). □

5) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numerele $10n+3$ şi $15n+4$ sunt prime între ele.

(OJ Neamţ, 1992)

Soluţie: Dacă $a = 10n+3$ şi $b = 15n+4$ au cel mai mare divizor comun $(a,b) = d$, atunci $d / (3a-2b)$, adică $d / 1$. □

6) Succesorul sumei a trei numere prime este un număr prim.Găsiţi cinci triplete de numere care îndeplinesc această condiţie.

(OJ Maramureş, 1996)

Soluţie: Dacă toate cele trei numere ar fi impare, succesorul sumei lor ar fi un număr par, imposibil,Deducem că unul dintre cele trei numere este 2. Tripletele sunt: $(2,3,5),(2,3,13),(2,3,17),(2,5,11),(2,7,13)$. Puteţi găsi şi altele ? □

7) Să se determine toate numerele prime p astfel încât numerele $p^2+1, 2p^2-1, 3p^2+1$ şi $5p^2-1$ să fie simultan prime.

(OJ Alba, 2000)

Soluţie: Dacă $p = 2$, numerele din enunţ sunt 5,7,13,19, deci sunt toate prime. Dacă $p > 2$, cum p este prim, el trebuie să fie impar şi astfel p^2+1 este par, deci nu poate fi prim. □

8) Să se arate că suma dintre 1 şi produsul primelor n numere prime nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

(OL Constanţa, 2004)

Soluţie: Fie $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, ..., p_n$ primele n numere prime şi considerăm că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1 = k^2$ .Deducem $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = (k-1)(k+1)$ .Produsul din stânga este evident număr par, deci unul din factorii din dreapta trebuie să fie şi el multiplu de 2, dar

atunci şi celălalt are aceeaşi proprietate, adică produsul din dreapta este divizibil prin 4, pe când membrul stâng al egalității nu are această proprietate. □

9) Să se determine numerele prime p pentru care numerele $24p+1$ sunt pătrate perfecte.

* * *

Soluție: $24p+1=(2k+1)^2 \Rightarrow 6p=k(k+1)$ şi de aici avem imediat $p\in\{2,5,7\}$. □

10) Să se calculeze restul împărțirii numărului $a=149^{128}$ la 7.

* * *

Soluție: $149\equiv 2(\text{mod}\,7)$ şi,cum 7 nu divide 2, cu mica teoremă a lui Fermat (5), avem că $2^6\equiv 1(\text{mod}\,7)$ (asta se observă de fapt imediat) şi astfel , deoarece $128=6\cdot 21+2$, restul împărțirii lui $a=149^{128}$ la 7 coincide cu restul împărțirii lui $2^2=4$ la 7, adică 4. □

11) Să se determine n pentru care numerele $n,n+4,n+6,n+10,n+12,n+16,n+22$ sunt toate prime.

* * *

Soluție: Pentru uşurința scrierii notăm numerele din enunț cu $x_1,x_2,...,x_7$ .Avem ceva de lucru şi prin verificări care durează totuşi nu foarte mult, avem că pentru $n\le 17$, numărul $n=7$ este convenabil.Pentru $n\ge 8$, considerăm $n=7k+a, k\ge 1, a\in\{1,2,...,7\}$ şi se arată imediat că pentru fiecare valoare a lui a, unul dintre numerele x_a este multiplu de 7. Aşadar $n=7$. □

12) Să se arate că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$, mulțimea $\{n+1,n+2,...,n+12\}$ conține cel mult 4 numere prime.

* * *

Soluție: Pentru $n=2$, avem numerele prime 3,5,7,11.Pentru, $n\ge 3$ 6 numere din mulțime sunt pare, deci nu sunt prime.Printre numere se găseşte şi un număr impar de forma $12k+3$ şi unul de forma $12k+9$, care nu sunt prime(sunt multipli de 3).Aşadar, cel mult 4 numere sunt prime. □

13) Să se arate că oricum am alege 51 de numere diferite din mulțimea $\{1,2,3,...,100\}$, există două dintre acestea care sunt prime între ele.

* * *

Soluție: Grupăm numerele în submulțimile $\{1,2\},\{3,4\},...,\{99,100\}$ şi avem 50 de submulțimi.Cu principiul lui Dirichlet avem că alegând 51 de numere, cel puțin două trebuie să fie din aceeaşi submulțime, deci sunt prime între ele(fiind consecutive). □

14) Să se determine numerele prime p pentru care $2p^2+1$ este prim.

* * *

Soluție: Evident, $p=2$ nu satisface enunțul, dar $p=3$ e convenabil.Pentru $p>3, p=3k\pm 1, k\in\mathbb{N}$, obținem imediat că $2p^2+1$ se divide prin 3. □

15) Pentru un număr natural n notăm cu $u(n)$ cel mai mare număr prim mai mic sau egal cu n, iar cu $v(n)$ cel mai mic număr prim mai mare decât n. Să se arate că:

$$\frac{1}{u(2)v(2)}+\frac{1}{u(3)v(3)}+\frac{1}{u(4)v(4)}+...+\frac{1}{u(2010)v(2010)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2011}$$

(Nicolae Stăniloiu, OJ 2006)

Soluție: Dacă p şi q sunt prime consecutive, notăm $A_p=\{n\in\mathbb{N}\,/\,p\le n<q\}$ şi observăm că A_p are $q-p$ elemente, iar pentru fiecare element al său, avem $u(n)=p, v(n)=q$ .Altfel spus, termenul $\frac{1}{pq}$ apare în sumă de $q-p$ ori. Deoarece 2003 şi 2011 sunt numere prime consecutive, ajungem la suma

$$\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{5-3}{3\cdot 5}+...+\frac{2011-2003}{2003\cdot 2011}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2003}-\frac{1}{2011}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2011}$$

□

● **Probleme propuse:**

1) Să se găsească numerele prime care se pot reprezenta atât ca sumă cât şi ca diferenţă de două numere prime.

2) Fie $n \in \mathbb{N}$ pentru care $2^n - 1$ este număr prim.Să se arate că n este număr prim.

3) Dacă numărul de două cifre $10a + b$ este prim, arătaţi că şi $2a - b$ este prim.

4) Să se determine toate numerele prime p pentru care $2^p + p^2$ este tot un număr prim.

5) Să se calculeze restul împărţirii numărului $b = 333^{332}$ la 11.

6) Care este cel mai mare număr de numere prime printre 10 numere naturale consecutive ?

7) Dacă a, b, c sunt numere prime şi numărul $E = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$ este întreg, arătaţi că $E = 0$.

8) Dacă p şi q sunt numere prime, iar a este natural astfel încât $a^2 = p^2 + q^2 + 1$, arătaţi că a este prim.

9) Să se arate că din oricare 15 numere naturale prime între ele, mai mici decât 2003, există cel puţin un număr prim.

10) Fie $a > b > c > d$ numere naturale nenule astfel încât $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$. Să se arate că numărul $ab + cd$ nu este număr prim.

Bibliografie:

$[1]$. Dumitru Buşneag,Florentina Boboc,Dana Piciu – Aritmetică şi teoria numerelor, Ed.Universitaria,Craiova, 1999

$[2]$. Ion Cucurezeanu – Probleme de aritmetică şi teoria numerelor, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1976

$[3]$. Keith Devlin – Vârsta de aur a matematicii, Ed.Theta,Bucureşti, 2000

$[4]$. Paul Radovici – Mărculescu – Probleme de teoria elementară a numerelor, Ed.Tehnică,Bucureşti, 1986

$[5]$. Colecţia Gazeta Matematică 1990 – 2008

$[6]$. Colecţia RMT 1995 – 2008

Profesori, Grup şcolar Oţelu – Roşu

TABĂRA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ VOINEASA 2008

În vacanţa de vară am participat în perioada 20-27 august împreună cu mama mea, prof. Loreta Ciulu, la prima din cele trei serii de elevi ai Taberei Naţionale de Matematică .Tabăra s-a desfăşurat într-o zonă cu un peisaj montan pitoresc, într-un climat de linişte şi deconectare în Staţiunea Voineasa –Vâlcea.

Au fost prezenţi un număr de 14 cadre didactice şi 180 de elevi de gimnaziu din judeţele: Argeş, Caraş-Severin, Dolj, Gorj, Prahova, Vâlcea şi Municipiul Bucureşti. Organizatorul Taberei a fost I.S.J. Vâlcea, iar Directorul Taberei a fost d-ul prof. Constantin Saraolu de la Şcoala cu clasele I-VIII Nr. 2 Râmnicu Vâlcea. În fiecare zi între orele 9-13 am participat la cursuri de pregătire la Şcoala din Voineasa, temele abordate având un nivel mediu de dificultate , au cuprins o parte teoretică şi una de aplicaţii. După amiaza s-au organizat drumeţii, concursuri de şah, iar seara elevii s-au distrat la Discoteca din localitate. S-a organizat pentru doritori o reuşită excursie la Sibiu unde am vizitat Muzeul Brukenthal , Muzeul în aer liber din Dumbrava Sibiului- Muzeul Civilizaţiei Populare Tradiţionale şi Grădina Zoologică.

În penultima zi de tabără s-a organizat un concurs interjudeţean de matematică cu durata de 90 minute, cuprinzând 3 subiecte . În ultima zi, în sala de spectacole a Hotelului Lotru a avut loc Festivitatea de premiere. Toţi elevii prezenţi în tabără au primit diplomă de participare, iar unui număr de 50 de elevi le-au fost acordate premii şi menţiuni constând tot în diplome. Sunt fericită că am reuşit să obţin la clasa mea Premiul I alături de alţi doi elevi din Gorj şi Prahova.

Elevii şi profesorii prezenţi au apreciat eforturile organizatorilor ca totul să decurgă bine şi m-am întors acasă cu mulţumirea unei experienţe noi plăcute.

Miruna Dalila Ciulu - elevă -Reşiţa

Probleme rezolvate din RMCS 25
Clasa a IV-a

IV.115 Diferența a două numere naturale este cel mai mic număr de trei cifre pare distincte. Dacă din suma lor scădem cel mai mare număr impar de trei cifre identice obținem succesorul numărului 750. Aflați descăzutul.

Inst.Mariana Mitrică, Reșița

Răspuns: 977. □

IV.116 Participând la „Crosul Europei", Andrei a primit la linia de sosire cartonașul 10, iar Bogdan s-a aflat pe locul 15, numărând de la sfârșit. Știind că între Andrei și Bogdan mai erau doi copii, iar Bogdan a obținut un timp mai bun decât Andrei, aflați câți sportivi au participat la cros.

Inst.Mariana Mitrică,Reșița

Răspuns: 21 de sportivi. □

IV.117 Bunica lui Anton vinde la piață mere și prune. Pentru 6 kg de mere și un kg de prune, bunica cere 20 de lei, iar pentru 6 kg de prune și un kg de mere, cere 15 lei. Marcu are 10 lei și nu îi plac merele. Câte kg de prune poate cumpăra Marcu de la bunica lui Anton?

Prof. Simina Moica, Arad

Răspuns : 5 kg de prune. □

IV.118 Bunicul lui Anton are 50 de pomi fructiferi (meri și pruni), iar bunicul lui Marcu are în livada sa cireși și vișini. Numărul merilor este dublul numărului vișinilor, iar numărul prunilor este dublul numărului cireșilor. Dacă bunicul lui Marcu ar mai avea 5 cireși, atunci numărul acestora ar fi egal cu cel al merilor. Puteți găsi câți pomi, din fiecare soi, are fiecare dintre cei doi bunici?

Prof. Simina Moica, Arad

Răspuns : 30 pruni,20 meri, 15 cireși, 10 vișini. □

IV.119 a) Care este numărul minim de numere diferite de o cifră care prin adunare dau un număr mai mare decât 40?

b) În câte feluri poate fi scris numărul 40 ca diferență a două numere de câte două cifre?

* * *

Răspuns : a) $9+8+7+6+5+4+3>40$; așadar numărul minim cerut este 7 ; b) $99-59=98-58=...=50-10=40$, deci este vorba despre 50 de modalități. □

IV.120 Dacă a și b sunt numere naturale diferite, se consideră că perechile (a,b) și (b,a) sunt diferite. Să se determine numărul perechilor (x,y) de numere naturale pentru care $1+3+x+7+y=25$.

* * *

Răspuns : 15 perechi. □

Clasa a V-a

V.115 Se consideră numerele

$$B=\left(\frac{1}{3^{2009}}-1\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{2009}}\right) \text{ și}$$

$$C=\left(\frac{1}{6^{2011}}-1\frac{1}{5}\right)+\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+...\frac{1}{6^{2011}}\right).$$ Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care numărul $A=125^n\cdot B:C$ se divide cu 10^{2008}.

Prof. Delia Marinca, Timişoara

Soluție: $\frac{1}{3^{2009}}-\frac{3}{2}=\frac{2-3^{2010}}{2\cdot 3^{2009}}$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{2009}}=\frac{3^{2009}+3^{2008}+...+1}{3^{2009}}=\frac{3^{2010}-1}{2\cdot 3^{2009}}$$

$$\left[\left(\frac{1}{3^{2009}}-1\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{2009}}\right)\right]=$$

$$=\frac{2-3^{2010}+3^{2010}-1}{2\cdot 3^{2009}}=\frac{1}{2\cdot 3^{2009}}$$ Se procedează analog pentru a doua paranteză pătrată și obținem: $\frac{4}{5\cdot 6^{2011}}$. Calculând $\frac{1}{2\cdot 3^{2009}}\cdot\frac{5\cdot 6^{2011}}{4}$ obținem $5\cdot 2^{2008}\cdot 9$, apoi avem că A$=5^{3n}\cdot 5\cdot 2^{2008}\cdot 9$ de unde deducem că 3n+1$\geq$2008, prin urmare n$\geq$669. □

V.116 Să se determine pentru ce valori ale lui $n\in\mathbb{N}$ numărul n^{n-2} se scrie ca un număr cu $n-2$ cifre?

Prof. Loreta Ciulu, Reșița

Soluție: $n \geq 10 \Rightarrow n^{n-2} \geq 10^{n-2} = 1000...0$ (n-2 zerouri).

Deci n^{n-2} are cel puțin (n-1) cifre.

Pentru $n < 10$ se verifică dacă toate cifrele de la 3 la 9 sunt soluții. □

V.117 Să se determine cifrele *x,a,b,c* cu *a,b,c* consecutive, știind că $\overline{xa} \cdot \overline{ax} = \overline{cba}$ (numerele fiind scrise în baza zece).

Prof. Loreta Ciulu, Reșița

Soluție: Observând ultimele cifre ale produsului, avem $a \cdot x = a$, de unde rezultă x=1. Deci $\overline{1a} \cdot \overline{a1} = \overline{cba}$. Dând lui a valorile 1,2,…,9, singura care verifică relația este a=5, pentru care avem $15 \cdot 51 = 765$. Prin urmare cifrele cerute sunt: a=5; b=6; c=7; x=1. □

V.118 Arătați că numărul:

$a = 2000^{1985} + 2001^{1985} + 2002^{1985} + 2003^{1985} + 2004^{1985}$ este divizibil cu 10.

Prof. Sânefta Vladu, Moldova Nouă

Soluție : ultimele cifre ale termenilor sumei sunt 0, 1, 2, 3, respectiv 4, așadar numărul *a* are ultima cifră 0. □

V.119 Alina și Roxana își aleg câte un număr.Dacă înmulțim cu 12 numărul Alinei, obținem numărul Roxanei înmulțit cu 10. Dublul numărului ales de Alina este cu 8 mai mic decât triplul numărului ales de Roxana.Puteți găsi care dintre cele două prietene și-a ales un număr mai mare ?

Prof. Simina Moica, Arad

Răspuns : Roxana a ales numărul 6 (iar Alina numărul 5). □

V.120 Pentru orice numere naturale nenule n și m se notează $x(n,m) = n^2 - n + m.$

a) Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x(n,m)$ să fie pătrat perfect;

b) Să se arate că există $m,n \in \mathbb{N}^*, m \neq 7, n \neq 7$ astfel încât $x(n,7)$ și $x(7,m)$ să fie pătrate perfecte;

c) Să se găsească cel mai mic număr natural k pentru care $x(7,1) + x(7,2) + ... + x(7,k) > 2008.$

Prof. Ovidiu Bădescu, Reșița

Răspuns : a) $n = m$; b) de exemplu, $x(2,7)$ și $x(7,22)$ sunt pătrate perfecte ; c) $k = 34.$ □

Clasa a VI-a

VI.115 Se consideră a și b numere naturale nenule astfel încât 11 divide numărul $a+5b$.Să se arate că 11 divide numerele $5a+14b$ și $3a+4b$.

Prof.Nistor Budescu, Dalboșeț

Soluție : $11/(a+5b) \Rightarrow 11/\left(6a+30b\right)$; cum

$6a+30b = (a+5b)+11b+(5a+14b)$, deducem $11/(5a+14b)$.

Deoarece $11/(a+5b)$, avem că $11/(2a+10b)$; deoarece

$11/(5a+14b)$, ajungem la $11/(5a+14b)-(2a+10b)$. □

VI.117 Determinați cele mai mici numere naturale nenule *x,y,z,t* și *n*, știind că: $8x = 10y = 15z = 24t = (x+y+z+t) \cdot n$

Prof. Loreta Ciulu, Reșița

Soluție: $8x = 10y = 15z = 24t = 120k$;unde $(8,10,15,24) = 120$.

Avem, $x = 15k, y = 8k, z = 12k, t = 5k, k \in \mathbb{N}^*$

Din condiția de minimalitate avem $k = 1$ și imediat obținem $n = 3$.

VI.118 Un elev a decupat un triunghi oarecare *AOB*, despre care știa că $m(\angle AOB) = 47^0$.Folosind numai acest șablon, un creion și rigla negradată (fără raportor), el a reușit să construiască un unghi cu măsura de 8°. Construiți și voi acest unghi în aceleași condiții, explicând cum ați procedat.

Prof. Delia Marinca, Timișoara

Soluție: Construim cu șablonul $\angle$AOB cu măsura de 47°, apoi mai construim în jurul lui O încă trei unghiuri adiacente două câte două: $\angle BOC, \angle COD, \angle DOE$, având și ele măsura de 47°.

Dar, $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) + m(\angle COD) + m(\angle DOE) = 47^\circ \cdot 4 = 188^\circ$

Ducem semidreapta [OA$'$ opusă semidreptei [OA și obținem: $m(\angle A'OE) = 188^\circ - 180^\circ = 8^\circ$.

VI.119 La o aniversare, gazda a invitat la masa rotundă din sufragerie pe cei 7 copii invitați (fiecare are cel puțin 7 ani, te poți înțelege cu ei) și care au suma vârstelor egală cu 60 de ani.

a) Să se arate că printre copiii invitați există cel puțin unul care are cel puțin 9 ani;

b) Să se arate că există 2 vecini la masă care au suma vârstelor cel puțin egală cu 17 ;

c) Este posibil ca exact 3 dintre copii să aibă fiecare câte 10 ani?
d) Este posibil ca exact 4 dintre copii să aibă fiecare câte 10 ani?

Augustin şi Ioan Septimiu Dinulică, elevi, Caransebeş

Soluție : a) dacă fiecare ar avea cel mult 8 ani, suma vârstelor lor ar fi cel mult 56 de ani, contradicție cu ipoteza ; b) dacă $v_1, v_2, ..., v_7$ sunt vârstele copiilor, presupunând că $v_1+v_2 \le 16, v_2+v_3 \le 16, ..., v_7+v_1 \le 16$, ajungem la $2(v_1+v_2+...+v_7) \le 7\cdot 16$, adică $120 \le 112$;c) e posibil, dacă alți 3 copii au câte 7 ani şi unul are 9 ani ; d) nu e posibil, pentru că ceilalți 3 copii ar avea împreună cel puțin $3\cdot 7 = 21 > 60-40 = 20.$ □

VI.120 Pe o dreaptă *d* se consideră, în această ordine, punctele *A,B,C,D* astfel încât *B* este mijlocul lui (AC) , *C* este mijlocul lui (*BD*), iar $BC = 4cm.$ Dacă *E* este mijlocul lui (BC), iar *F* şi *G* sunt separate de dreapta d astfel încât $FE \perp d, GD \perp d, FE = 4cm, GD = 6cm$, să se compare lungimile segmentelor (AF) şi (EG).

Prof. Delia şi Adrian Dragomir, Caransebeş

Soluție : Se consideră $H \in (DG)$ astfel încât $DH = 4$ cm, de unde

$\Delta AEF \equiv \Delta EDH \Rightarrow AF = EH < EG.$

Clasa a VII-a

VII.115 Să se determine numerele naturale nenule *a,b,c* pentru care

$$\frac{2a}{a+2} = \frac{3b}{b+3} = \frac{4c}{4+c}\ .$$

Prof.Nistor Budescu, Dalboşeț

Soluție : $\frac{2a}{a+2} \ge 2 \Rightarrow 2a \ge 2a+4$, absurd,deci

$\frac{2a}{a+2} < 2, \forall a \in \mathbb{N}^*$ .Deducem aşadar $\frac{4c}{4+c} < 2$;pentru $c \ge 4$,avem şi

$\frac{4c}{4+c} \ge 2$,deci $c \le 3$ .Analizăm acum imediat ce se întâmplă pentru

$c \in \{1,2,3\}$ şi ajungem la $c = 3, b = 4, a = 12.$ □

VII.116 Să se determine numerele naturale *x,y,z* pentru care

$$2^x + 2^y + 2^z = 2336.$$

Olimpiadă Vietnam

Soluție : Presupunem $x \ge y \ge z$ şi folosim $2336 = 2^5 \cdot 73$ .Dacă $y = z$,ajungem la $y = z = 4$ şi egalitatea din enunț nu este posibilă ; pentru $y > z$,deoarece membrul drept e multiplu de 32, deducem $z = 5.$ Putem simplifica cu 32 şi ajungem la $2^{x-5} + 2^{y-5} = 72 = 2^3 \cdot 9$ .Cum $x \ne y$, putem simplifica prin 8 şi ajungem la $y = 8, x = 11.$ Avem aşadar ca şi soluții permutările mulțimii $\{5,8,11\}$.□

VII.117 Se dă ΔABC isoscel *(AB=AC)* cu $m(\angle BAC) = \alpha$ $(90^0 < \alpha < 180^0)$ în care $[AD]$ este înălțime, iar $(AE$ şi $(AF$ bisectoarele $\angle BAD$, respectiv $\angle CAD$, $E \in (BD), F \in (DC)$.

Fie $M \in (AD$ şi $(MD) \equiv (AD)$.

a) Arătați că : $MF \parallel AE$

b) Determinați α astfel încât $MF \perp AC$

c) Pentru α determinat la punctul b) precizați natura ΔAMC .

Prof. Loreta Ciulu, Reşița

Soluție: . a) $[AD]$ înălțime $\Rightarrow [AD -$ bisectoare $\Rightarrow$

$\angle BAD \equiv \angle CAD, \angle EAD \equiv \angle DAF$

$\Delta ADF \equiv \Delta MDF \Rightarrow \angle DAF \equiv \angle DMF$

Deci: $\angle EAD \equiv \angle DMF \Rightarrow MF \parallel AE$.

În ΔAPM dreptunghic, $\angle MAF \equiv \angle FAP \equiv \angle AMP$, iar suma lor este 90^0 . $(MF \cap AC = \{P\})$.

Deci: $m(\angle MAF) = 30^0$ şi $m(\angle BAC) = 120^0$.

c) $\Delta ADC \equiv \Delta MDC \Rightarrow m(\angle AMC) = m(\angle MAC) = 60^0 \Rightarrow \Delta AMC$ este echilateral.

VII.118 a) Să se arate că nu există numere întregi *a* şi *b* pentru care

$$\frac{2a+1}{b+1} = \frac{2b+3}{a+1}\ ;$$

b) Să se determine numerele întregi *a* şi *b* pentru care

$$\frac{2a+1}{b+1} = \frac{a+1}{b}.$$

Prof. Simina Moica, Arad

Soluție: a) $\frac{2a+1}{b+1}=\frac{2b+3}{a+1}=\frac{2a+2b+4}{a+b+2}=2$ conduce imediat la $a-b=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$;b) $a=1,b=2.$ □

VII.119 Să se determine numerele naturale *a,b,c* pentru care

$$ab+bc+ca=2+abc.$$

* * *

Soluție : $a(b+c-bc)=2-bc$. Deosebim cazurile :
1) $2-bc=0\Rightarrow b=1,c=2,a=0$ sau $b=2,c=1,a=0$; 2) $2-bc\neq 0\Rightarrow a=\frac{2-bc}{b+c-bc}\in\mathbb{N}$, de unde $2-bc\geq b+c-bc\Rightarrow b+c\leq 2$ și astfel $b=0,c=1,a=2$ sau $c=0,b=1,a=2$ sau $a=1,b=1,c=1$ sau $b=0,c=2,a=1$ sau $c=0,b=2,a=1$. □

VII.120 În triunghiul *ABC* se consideră bisectoarea (*AE* a unghiului $\measuredangle BAC$, $E\in(BC)$ și punctele $D\in(AB),F\in AE\cap CD$ astfel încât $2\cdot DB=AB,\ 3\cdot EC=BC$ și $4\cdot FC=AB.$

Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului *ABC.*

Prof.Lucian Dragomir, Shortlist ONM, 2008

Soluție : Cu teorema bisectoarei deducem $\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{AC}=2$, deci $AB=2AC$ (1) ; din ipoteză avem $AB=2AD$ (2) și, cu teorema lui Menelaus în ΔBDC , pentru punctele coliniare *A,F,E*, ajungem la $\frac{AD}{AB}\cdot\frac{EB}{EC}\cdot\frac{FC}{FD}=1$, de unde $FC=FD$, adică $4FC=2DC=AB$ (3).
Din (1), (2), (3), ajungem la $AD=AC=DC$, deci $m(\measuredangle BAC)=60^0$.Imediat vom obține acum $m(\measuredangle ABC)=30^0,m(\measuredangle ACB)=90^0.$ □

Clasa a VIII-a

VIII.115 Să se arate că : $\sqrt{17}+\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{13}>2\cdot\sqrt{14}-\sqrt{12}-\sqrt{10}$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu-Roșu

Soluție : Din nou, dintr-o regretabilă *eroare de tehnoredactare*, avem de fapt : $\sqrt{17}-\sqrt{13}=\frac{4}{\sqrt{17}+\sqrt{13}}<\frac{4}{\sqrt{14}+\sqrt{10}}=\sqrt{14}-\sqrt{10}$ și $\sqrt{15}-\sqrt{13}=\frac{2}{\sqrt{15}+\sqrt{13}}<\frac{2}{\sqrt{14}+\sqrt{12}}=\sqrt{14}-\sqrt{12}$. Prin însumare, obținem $\sqrt{17}+\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{13}<2\cdot\sqrt{14}-\sqrt{12}-\sqrt{10}$. Este de la sine înțeles că elevii care au sesizat eroarea au primit punctaj maxim. (Rugăm așadar, din nou, colegii și elevii din județ și nu numai, să ne ajute în demersul VOLUNTAR de a susține revista : probleme, note, articole, corectură măcar... Nu pot face câțiva oameni, foarte puțini din păcate, munca necesară, de la A la Z, pentru editare...Iar dacă revista pare multora că nu e este utilă, mai bine să renunțăm. Așteptăm păreri... Mulțumim).□

VIII.116 Se consideră trapezul isoscel *ABCD* în care $AB\,//\,CD$, $AB=2\cdot CD$. Se notează cu *M* și *N* mijloacele bazei mari, respectiv bazei mici, iar *P* un punct pe dreapta *MN* pentru care $\widehat{BPM}\equiv\widehat{ABC}$. Să se arate că dreapta *AP* este perpendiculară sau pe *DM* sau pe *CM.*

Prof.Nistor Budescu,Dalboșeț

Soluție : Deosebim cazurile : 1) $P\in(MN)$ .Notăm $m(\measuredangle BPM)=m(\measuredangle ABC)=x$, $m(\measuredangle MBP)=y,CN=a$ și avem astfel $DN=a,AM=MB=2a$ .Se știe că $MN\perp AB$. Din ΔBPM în care $\measuredangle M$ este unghi drept, avem $x+y=90^0$ .Cum $CD\,//\,MB,(CD)\equiv(MB)$, deducem că $DM\,//\,BC$ .Notăm $AP\cap BC=\{Q\}$ și,deoarece *PM* este mediatoarea lui *(AB)*, avem $m(\measuredangle PAB)=y$. Din ΔABQ deducem $m(\measuredangle AQB)=180^0-(x+y)=90^0$ .Așadar $AQ\perp BC$ .Din $AP\perp BC,DM\,//\,BC$, ajungem la $AP\perp DM$; 2) $M\in(NP)$ .Se ajunge la $AP\perp CM$.

VIII.117 Fie triunghiului *ABC* oarecare și *M* un punct arbitrar în planul său. Notăm cu G_1,G_2,G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor *MBA, MBC* respectiv *MCA*. Să se arate că triunghiul $G_1G_2G_3$ are arie constantă oricare ar fi poziția punctului *M* în plan, $M\notin[AB]\cup[BC]\cup[CA]$.

Prof. Loreta Ciulu, Reșița

Soluție: Fie $D \in AM$ cu $AD \equiv DM$ și $E \in BM$ cu $BE \equiv EM$.

Rezultă că: $G_1 = BD \cap AE$; $G_2 \in CE$ astfel încât $\frac{G_2C}{EC} = \frac{2}{3}$;

$G_3 \in CD$ astfel încât $\frac{G_3C}{DC} = \frac{2}{3}$.

În triunghiul CDE avem $\frac{G_3C}{DC} = \frac{2}{3} = \frac{G_2C}{EC}$ deci triunghiurile CDE și G_2G_3C sunt asemenea, prin urmare $\frac{G_2G_3}{DE} = \frac{2}{3}$ (1)

În triunghiul MAB, segmentul DE este linie mijlocie, deci $\frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$ (2).

Din (1) și (2) obținem: $\frac{G_2G_3}{AB} = \frac{1}{3}$ (3)

Analog se arată că: $\frac{G_1G_3}{BC} = \frac{1}{3}$ și $\frac{G_1G_2}{AC} = \frac{1}{3}$ (4)

Din (3) și (4) rezultă că triunghiurile $G_1G_2G_3$ și ABC sunt asemenea cu raportul de asemănare egal cu $\frac{1}{3}$. Prin urmare $\frac{Aria\Delta G_1G_2G_3}{Aria\Delta ABC} = \frac{1}{9}$ de unde $Aria\Delta G_1G_2G_3 = \frac{Aria\Delta ABC}{9}$.

Dar aria triunghiului ABC este constantă pentru orice poziție a punctului M în plan, deci și aria triunghiului $G_1G_2G_3$ este constantă. □

VIII.118 Arătați că oricare ar fi numerele naturale *m, n, p, q,* numărul: $N = 2\cdot 35^m + 4\cdot 52^n + 5\cdot 69^p + 7\cdot 86^q - 1$ este divizibil cu 17.

Prof. Delia Marinca, Timişoara

Soluție:

$$\mathrm{N} = 2\cdot(34+1)^{\mathrm{m}} + 4\cdot(51+1)^{\mathrm{n}} + 5\cdot(68+1)^{\mathrm{p}} + 7\cdot(85+1)^{\mathrm{q}} - 1 =$$
$$2\cdot(\mathrm{M}_{17}+1) + 4\cdot(\mathrm{M}_{17}+1) + 5\cdot(\mathrm{M}_{17}+1) + 7\cdot(\mathrm{M}_{17}+1) - 1 =$$
$$\mathrm{M}_{17} + 2 + 4 + 5 + 7 - 1 = \mathrm{M}_{17} + 17, \text{deci}, \mathrm{N} \vdots 17$$

VIII.119 Pătratele *ABCD* și *BEFC* au latura comună *BC* de lungime 2.Se notează $[AF]\cap[BC]=\{O\}$ și $[AF]\cap[BD]=\{G\}$.

a) Să se arate în cel puțin trei moduri că există $a \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\mathcal{A}[DBF] = a^2$;

b) Să se arate în cel puțin două moduri că O este mijlocul lui $[AF]$;

c) Să se calculeze $\mathcal{A}[ABF]$ și $\mathcal{A}[ABG]$.

Prof. Simina Moica, Arad

Soluție : a) (1) $\mathcal{A}_{[DBF]} = \frac{FD\cdot BC}{2} = 4 = a^2 \Rightarrow a = 2 \in \mathbb{Q}$; (2)

$BD = BF = 2\sqrt{2}$ (diagonale în pătrate) și

$m(\measuredangle FDB) = m(\measuredangle DFB) = 45^0 \Rightarrow m(\measuredangle DBF) = 90^0$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{[DBF]} = \frac{BD\cdot BF}{2} = 4$;

(3) $\Delta BCD \equiv \Delta BCF$ (L.U.L.) $\Rightarrow \mathcal{A}_{[DBF]} = 2\cdot \mathcal{A}_{[DBC]} = 2\cdot\frac{2\cdot 2}{2} = 4$;

b) (1) $\Delta BOA \equiv \Delta COF \Rightarrow AO = OF$; (2)

$CO \parallel DA \Rightarrow \Delta FCO \sim \Delta FDA$ și astfel $\frac{FO}{FA} = \frac{1}{2}$;

c) $\mathcal{A}_{[ABF]} = \mathcal{A}_{[AEF]} - \mathcal{A}_{[EBF]} = 2$ și

$\Delta ABG \sim \Delta FDG \Rightarrow AG = \frac{1}{3}AF = \frac{2\sqrt{5}}{3}$; în triunghiul dreptunghic *AEF* avem $\sin\measuredangle EAF = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \mathcal{A}_{[ABG]} = \frac{2}{3}$. □

VIII.120 Există numere naturale *n* pentru care $2^n + 3^n + 10^n$ este pătrat perfect ?

Prof.Cristinel Mortici,Târgoviște

Soluție : Răspuns negativ. Dacă *n* este impar, avem $2^n + 3^n + 10^n = 4k+3, k \in \mathbb{N}$, iar pentru *n* par, adică $n = 2p, p \in \mathbb{N}$,avem $(10^p)^2 < 10^{2p} + 3^{2p} + 2^{2p} < (10^p + 1)^2$. □

Clasa a IX-a

IX.115 Să se arate că dacă $a,b\in(0,\infty)$,atunci

$$\frac{4}{\sqrt{a^2b+ab^2}}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}.$$

Prof.Nistor Budescu,Dalboşeţ

Soluţie : Inegalitatea mediilor conduce la $\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}$ (1) şi $\frac{2(a+b)\cdot 1}{a+b+1}\le\sqrt{(a+b)\cdot 1}$ (2). E suficient acum să înmulţim cele două inegalităţi şi ajungem la $\frac{4ab}{a+b+1}\le\sqrt{ab(a+b)}$, de unde $\frac{4}{\sqrt{a^2b+ab^2}}\le\frac{a+b+1}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}$.

IX.116 Să se rezolve ecuaţia : $\left[\frac{x-1}{3}\right]\cdot\left[\frac{x+5}{6}\right]=\frac{x+1}{2}$,unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a*.

Prof.Nistor Budescu,Dalboşeţ

Soluţie : $\frac{x+1}{2}=a\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=2a-1\in\mathbb{Z}$ şi ecuaţia devine $\left[\frac{2a-2}{3}\right]\cdot\left[\frac{a+2}{3}\right]=a$ .Considerăm acum $a=3k, a=3k+1, a=3k+2, k\in\mathbb{Z}$ şi ajungem la $x\in S=\{-1,7,11\}$.□

IX.117 Să se determine numerele naturale nenule *a,b,c* pentru care

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=2.$$

Olimpiadă Marea Britanie

Soluţie : Ecuaţia este simetrică în *a,b,c*, aşadar putem considera $a\ge b\ge c$ şi astfel ajungem la $\left(1+\frac{1}{c}\right)^3\ge 2$, de unde $c\le 3$ .Analizăm cazurile posibile care au apărut acum şi obţinem tripletele $(7,6,2),(9,5,2),(15,4,2),(8,3,3),(5,4,3)$. □

IX.118 Considerăm expresia: $E(x)=\frac{x^{100}-x^{99}+\ldots+x^2-x+1}{x^{100}+x^{99}+\ldots+x^2+x+1}$ şi numărul real $\alpha=\frac{0,(2)+0,(3)+0,(4)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}$. Calculaţi $E(\alpha)$.

Prof. Loreta Ciulu, Reşiţa

Răspuns: $\alpha=-1$ şi $E(\alpha)=101$. □

IX.119 Să se dea un exemplu de ecuaţie cu coeficienţi întregi care are o rădăcină egală cu $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Prof. Delia şi Adrian Dragomir, Caransebeş

Soluţie : $a=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\Rightarrow(a-1)^2=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$, de unde $\left(a^2-2a-4\right)^2=24$ şi imediat *a* este soluţie a ecuaţiei $x^4-4x^3-4x^2+16x-8=0$.□

IX.120 Se consideră o funcţie $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ care satisface proprietăţile :

a) $f\left(x,f(x,y)\right)=f(x,y)+x+1, \forall x,y\in\mathbb{N}$;

b) $f(0,y)=y+1, \forall y\in\mathbb{N}$;

c) $f(x+1,0)=f(x,1), \forall x\in\mathbb{N}$.

Să se calculeze $f(1,4)$.

Prof. Alfred Ekstein, Viorel Tudoran, Arad

Răspuns : $f(1,4)=6$. □

Clasa a X-a

X.115 Să se arate că există un punct *P* în interiorul unui triunghi *ABC* astfel încât $m(\widehat{ABP})=m(\widehat{BCP})=m(\widehat{CAP})=30^0$ dacă şi numai dacă triunghiul *ABC* este echilateral. (enunţ corectat)

Prof. Nistor Budescu, Dalboşeţ

Notă : Cum din enunţ lipsea ceva esenţial, ne cerem scuze şi vă aşteptăm cu încercări. □

X.116 Să se determine perechile (a,b) de numere întregi pentru care

$$a+\log_2 b=2.$$

Prof. Simina Moica, Arad

Răspuns : $(a,b)=\left(2-n,2^n\right), n\in\mathbb{Z}$. □

X.117 Să se calculeze partea întreagă a numărului

$$a = \log_6 11 + \log_{11} 36 + \log_{36} 216 + \log_{216} 1296.$$

Prof. Alfred Ekstein, Viorel Tudoran, Arad

Soluție : Se foloseşte inegalitatea mediilor şi se ajunge la

$a \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\log_6 1296} > 5$ şi

$\log_6 11 < \frac{3}{2}, \log_{11} 36 < \frac{3}{2}, \log_{36} 216 < \frac{3}{2}, \log_{216} 1296 < \frac{3}{2}$.Imediat

obținem $[a] = 5$. □

X.118 Să se determine $x > 0$ pentru care $x^{\log_{81} x} + 27x - 6 = 0$.

Prof. Alfred Ekstein, Viorel Tudoran, Arad

Soluție : Notăm $\log_{81} x = u \Rightarrow x = 3^{4u}$ şi ecuația devine

$3^{4u^2} + 3^{4u+3} = 6$; folosind inegalitatea mediilor avem

$6 = 3^{4u^2} + 3^{4u+3} \geq 2 \cdot \sqrt{3^{4u^2+4u+3}}$, de unde ajungem imediat la

$(2u+1)^2 \leq 0$ şi în final $x = \frac{1}{9}$. □

X.119 Să se exprime $\log_{49} 8$ în funcție de $a = \log_{14} 42$ şi $b = \log_{14} 36$.

Prof. Delia şi Adrian Dragomir, Caransebeş

Răspuns : $x = \frac{6-6a+3b}{4a-2b}$. □

X.120 Să se determine numerele naturale *m* şi *n* pentru care egalitatea

$\sqrt[m]{x \cdot \sqrt[n]{x}} \cdot \sqrt[n]{x^2 \cdot \sqrt[m]{x}} = x^2$ este adevărată pentru orice $x > 0, x \neq 1$.

Prof. Delia şi Adrian Dragomir, Caransebeş

Răspuns : $m = n = 2$. □

Clasa a XI-a

XI.115 Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.Să se calculeze A^{50}.

Prof. Simina Moica, Arad

Idee : Se scrie $A = I_3 + B$, cu $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

XI.116 Folosind notațiile uzuale pentru un triunghi *ABC*, să se calculeze

determinantul $D = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & \cos 2A \\ 1 & b^2 & \cos 2B \\ 1 & c^2 & \cos 2C \end{vmatrix}$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu-Roşu

Soluție : Se folosesc proprietățile determinanților, teorema sinusurilor şi formula $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. □

XI.117 Să se arate că numărul $a = 91!$ se divide prin $b = 3^{40}$.

Prof. Alfred Ekstein, Viorel Tudoran, Arad

Soluție : $C_{91}^9 \cdot C_{82}^9 \cdot C_{73}^9 \cdot \ldots \cdot C_{19}^9 \cdot C_{10}^9 \cdot C_1^1 = \frac{91!}{(9!)^{10}} \in \mathbb{N}$;cum $9!$ este multiplu de 3^4 , deducem că $a = 91!$ se divide prin $b = 3^{40}$. □

XI.118 O dreaptă variabilă care trece prin punctul $P(2,3)$ intersectează axele *Ox* şi *Oy* în punctele *A*, respectiv *B*. Să se calculeze minimul ariei triunghiului *AOB*.

Prof. Alfred Ekstein, Viorel Tudoran, Arad

Răspuns : Minimul cerut este 12.Pentru $A(a,0), B(0,b)$,ecuația dreptei este $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, de unde $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} - 1 = 0$, iar aria dorită este $\frac{ab}{2}$.Maximul expresiei $\frac{1}{ab} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{a}\right) \cdot \left(\frac{3}{b}\right)$ se obține pentru $\frac{2}{a} = \frac{3}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4, b = 6$.

□

XI.119 Să se determine limita şirului $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 2$ şi

$5 \cdot a_{n+1} = 4 + a_n{}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.(enunț corectat)

Prof. Alfred Ekstein, Viorel Tudoran, Arad

Notă : în forma publicată, problema este banală(aşa cum au observat majoritatea elevilor) ; vă propunem să încercați aşa (ne cerem scuze din nou pentru erorile de tehnoredactare, însă se ştie, numai cine nu munceşte, nu greşeşte...). Mulțumim pentru înțelegere.

XI.120 Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care satisface condiţiile:

a) $x_n \in (0,\pi), \forall n \in \mathbb{N}$;

b) $\sin x_n + \cos x_{n+1} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Să se arate că şirul este convergent şi să se determine limita sa.

Olimpiadă Cluj, 1983

Soluţie : $\cos x_{n+1} = 1 - \sin x_n \geq 0 \Rightarrow x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}$. În plus $x_{n+1} = \arccos(1 - \sin x_n), n \in \mathbb{N}$. Dacă $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$, atunci se obţine inductiv $x_n > x_{n+1}$, adică şirul este strict descrescător şi astfel convergent; trecem la limită în relaţia din enunţ şi ajungem la limita 0. Dacă $x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ raţionament analog, limita este $\frac{\pi}{2}$. □

Clasa a XII-a

XII.115 Să se determine numerele prime p pentru care există numerele întregi x,y astfel încât : $p+1 = 2x^2$ şi $p^2+1 = 2y^2$.

Olimpiadă Germania

Soluţie : Problema nu e deloc uşoară.Evident, p este număr impar şi putem presupune $x > 0.y > 0$. Să remarcăm acum că $2\left(y^2 - x^2\right) \equiv 0 (\text{mod } p)$ .Cum p este număr prim impar, deducem că $y = \pm x (\text{mod } p)$ .Deoarece $x < y < p$,ajungem la $x + y = p$ şi aşadar $p^2 + 1 = 2(p-x)^2 = 2p^2 - 4px + p + 1$, deci $p = 4x - 1, 2x^2 = 4x \Rightarrow p = 7$. □

XII.116 Să se arate că pentru orice $a, b, c \in [0,1]$ are loc inegalitatea :

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

Prof.Ecaterina Zsibriczki,Bocşa

Idee: Studiaţi variaţia funcţiei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1}\right)\cdot x + (x-a)(x-b)(x-c) - 1$$

XII.117 Se defineşte pe $\mathbb{R}$ o lege de compoziţie "$*$" care satisface condiţiile : 1) $\left(\frac{a+1}{3}\right) * \left(\frac{a}{2}\right) = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$;

2) $(a*b)\cdot c = (a\cdot c)*(b\cdot c)$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

Să se calculeze $10*14$.

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu

Idee : să luăm în 1) $a = 14$, apoi în 2) $a = 5, c = 2, b = 7$.

XII.118 Se consideră o funcţie $f:[0,\infty) \to (0,1]$ derivabilă şi bijectivă,care admite o primitivă F cu $F(0) = 0$ .Să se studiez injectivitatea şi surjectivitatea funcţiei $g:(0,\infty) \to (1,\infty), g(x) = \frac{x}{F(x)}$.

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu

Notă : Deoarece nu am primit nicio soluţie, mai aşteptăm. □

XII.119 Să se determine $\int \frac{x^{13} + x^9 - x^8 + x^4}{x^{19} + x^{10} + x^9 + 1} dx$, $x \in (0,\infty)$.

Prof.Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu

Idee : $\frac{x^{13} + x^9 - x^8 + x^4}{x^{19} + x^{10} + x^9 + 1} = \frac{x^4}{x^{10}+1} + \frac{x^9}{x^{10}+1} - \frac{x^8}{x^9+1}$. □

XII.120 Să se arate că un grup $(G,\cdot)$ cu proprietatea că există $a,b \in G$ astfel încât $ab^2 = b^3a^2$ şi $b^4 = e$, conţine un subgrup izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_2,+)$.

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu

Soluţie : înmulţim prima egalitate la stânga cu b şi avem : $bab^2 = a^2$, apoi înmulţim la dreapta cu b^2 şi avem $ba = aab^2$ sau $ba = ab^3a^2$; înmulţim acum la stânga cu b^3 şi la dreapta cu a şi ajungem la $b^4a^2 = b^3ab^3a^3$, adică $a^2 = b^3ab^3a^3$, de unde $e = b^3ab^3a$ .Aşadar $x = b^3a$ are proprietatea că $x^2 = e$, deci $H = \{e, x\}$ are proprietatea dorită.

Probleme propuse
(se primesc soluţii până în data de 2 februarie 2009)

Notă : Se pot trimite şi soluţii la problemele propuse în articolele apărute în ultimele două numere ale revistei

Clasa a IV-a

IV.121 Suma a trei numere este 1940. Aflaţi numerele ştiind că diferenţa dintre primele două este egală cu suma ultimelor două numere, adică 837.

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

IV.122 La un magazin s-au adus globuleţe roşii, galbene şi verzi, numărul lor fiind egal cu cel mai mare număr par scris cu trei cifre distincte.
Determinaţi numărul globuleţelor de fiecare culoare ştiind că 597 globuleţe nu sunt verzi, iar numărul globuleţelor galbene este egal cu cel mai mic număr de trei cifre consecutive a căror sumă este 9.

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

IV.123 Trei saci cu cartofi şi cinci saci cu varză cântăresc împreună 235 kg. Ştiind că un sac cu varză cântăreşte cu 9 kg mai puţin decât un sac cu cartofi, aflaţi cât cântăreşte un sac de fiecare fel.

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

IV.124 Suma vârstelor a trei nepoţi este cu un sfert de veac mai mică decât a bunicului. Dacă vârsta acestuia reprezintă un număr impar scris cu două cifre consecutive a căror sumă este 13, iar nepotul cel mic a împlinit un deceniu, determinaţi vârsta celorlalţi nepoţi care sunt gemeni.

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

IV.125 Andrei şi Karina au rezolvat împreună 22 de probleme.Dacă Andrei ar fi rezolvat de 6 ori mai multe probleme, ar fi avut rezolvate de 5 ori mai multe decât a rezolvat Karina.Câte probleme a rezolvat fiecare?

Dan Emil Bugariu, elev, Oţelu – Roşu

IV.126 Găsiţi ce numere trebuie puse în locul semnelor $\square, \Delta, \bigcirc$ astfel încât să fie adevărate egalităţile : $\square+\Delta+\bigcirc=20$, $\bigcirc-\Delta=5$ şi $\square-\bigcirc=1$.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oţelu - Roşu

IV.127 Ana , Ion şi părinţii lor au împreună 55 de ani. Copiii sunt gemeni, iar vârstele părinţilor sunt reprezentate de numere consecutive. Când s-a născut Ana, mama sa avea 21 de ani. Câţi ani are fiecare ?

Inst.Robertha Oprea, Reşiţa

IV.128 Pentru o sală de sport s-au cumpărat corzi, panglici şi mingi. Ştiind că 114 nu sunt panglici, 121 nu sunt corzi, iar 83 nu sunt mingi, află numărul obiectelor din fiecare fel care s-au cumpărat.

Inv. Elisaveta Vlăduţ,Reşiţa

IV.129 Vrăjitoarea cea rea a furat şcolarului parantezele şi semnele operaţiilor . Faceţi ca egalităţile următoare să fie adevărate .

5 5 5 5 5 5=0
5 5 5 5 5 5=1
5 5 5 5 5 5=6

Inst. Graţiela Pinoşanu, Reşiţa

Clasa a V-a

V.121 Fie numerele $A=7\cdot 3^{2008}$ şi $B=5\cdot 3^{2006}$. Arătaţi că restul împărţirii lui A la B este cubul unui număr natural.

Prof. Marian Bădoi, Oraviţa

V.122 a) Aflaţi un număr natural x ştiind că $1+3+5+7+...+x=10000$
b) Scrieţi numărul $A=2009+(2+4+6+...+4010+4014)$ ca sumă a două pătrate perfecte.

Prof. Marian Bădoi, Oraviţa

V.123 Scrieţi numărul $10^{2009}+9$ ca sumă de numere naturale consecutive.

Prof. Ramona Călin, Reşiţa

V.124 a) Să se determine numărul natural *a* ştiind că există $n\in\mathbb{N}$ pentru care $3^n=a$ şi $27^{n+1}=9\cdot 81$;
b) Să se determine $n\in\mathbb{N}$ pentru care $3^{n+2}=27^n$;
c) Să se determine $n\in\mathbb{N}$ pentru care 3^n-1 şi 3^n+1 sunt numere prime .

Prof. Carina şi Sebastian Corîci, Caransebeş

V.125 Să se determine numărul $\overline{abcde}$ pentru care $\overline{abcde} = 9 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{cde}$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

V.126 Să se găsească numărul prim care împărţit la 6 dă restul 14.

Prof. D.M.Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti

V.127 Zmeul din poveşti are 33 de capete. Fii împăratului verde încearcă să-l răpună. Dacă fiul cel mic îi taie 3 capete zmeului, acestuia îi cresc la loc 7 capete, dacă cel mijlociu taie 6 capete, zmeului îi cresc la loc doar 4 capete, iar dacă fiul cel mare taie 9 dintre capete, zmeului îi cresc 3 capete în loc. Evident, zmeul este răpus dacă rămâne fără niciun cap. Este posibil ca zmeul să fie răpus?

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

V.128 Determinaţi numerele naturale *a,b,c*, $a < b < c$ pentru care $\overline{abc}$ este număr prim şi $n = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$ este pătrat perfect.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

V.129 Se consideră mulţimile $A = \{a, 3, 2b+1\}$ şi $B = \{a+b, 2b, 5\}$. Să se determine numerele naturale nenule *a* şi *b* pentru care $A \cup B$ are 4 elemente.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

Clasa a VI-a

VI.121 Un număr de 2009 puncte ale planului se colorează arbitrar în exact 8 culori. Să se arate că există cel puţin 25 puncte la fel colorate.

Prof. Marian Bădoi, Oraviţa

VI.122 Se dau unghiurile $\sphericalangle A_0OA_1, \sphericalangle A_1OA_2, ..., \sphericalangle A_{n-1}OA_n$ de măsuri $\frac{576^\circ}{4}, \frac{576^\circ}{28}, \frac{576^\circ}{70}, ... \frac{576^\circ}{n(n+3)}$

Să se determine n∈**N** astfel încât punctele A_0, O, A_n să fie coliniare.

Prof. Marian Bădoi, Oraviţa

VI.123 Se consideră zece unghiuri în jurul unui punct care verifică simultan condiţiile:
i) oricum am lua trei dintre aceste unghiuri, există cel puţin două de aceeaşi măsură
ii) valoarea cea mai mică a măsurilor celor zece unghiuri este 27°, iar valoarea cea mai mare a măsurilor lor este 45°.
Să se determine măsurile celor zece unghiuri.

Prof. Marina Constantinescu,Tismana

VI.124 Se consideră $S_1 = \frac{3}{1\cdot 4} + \frac{3}{4\cdot 7} + ...+ \frac{3}{2005\cdot 2008}$ şi $S_2 = \frac{4018}{1\cdot 3} + \frac{4018}{3\cdot 5} + \frac{4018}{5\cdot 7} + ...+ \frac{4018}{2007\cdot 2009}$. Să se arate că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $S_1 \cdot S_2 = k$.

Prof. Ramona Călin, Reşiţa

VI.125 Comparaţi numerele $a = \frac{2008+10^{274}}{2008+7^{411}}$ şi b $= \frac{2009+5^{393}}{2009+2^{655}}$.

Prof. Carina şi Sebastian Corîci, Caransebeş

VI.126 Tom şi Jerry se hotărăsc să se întreacă la un concurs de viteză în proba de 400 m plat.Tom aleargă cu viteza medie de 48 km/h iar Jerry cu viteza medie de 240m/min. Precizaţi: a) Cu cât timp ajunge Tom înaintea lui Jerry dacă iau startul deodată ? b) Ce distanţă trebuie să-i acorde Tom lui Jerry în avans, pentru ca să treacă în acelaşi timp linia de sosire?

Prof. Mariana Drăghici, Reşiţa

VI.127 În ΔABC, *M* şi *N* sunt mijloacele laturilor $[AC]$, respectiv $[AB]$, iar *E* şi *D* simetricele punctelor *C* şi *B* faţă de *N* respectiv *M*.
Arătaţi că:

a) Punctele *E, A, D* sunt coliniare;
b) $DE = 4 \cdot MN$

Prof.Loreta Ciulu, Reşiţa

VI.128 Un acvariu plin cu apă, are lungimea de 150 cm, lățimea de 80 cm și înălțimea de 50 cm.
La ce înălțime ajunge apa dacă din acvariu s-au scos 4 l de apă?

Prof. Marius Şandru, Reşița

VI.129 Să se determine numărul mulțimilor $H=\{a,b\}$ de numere naturale pentru care numerele $x=\overline{ab}$ și $y=\overline{ba}$ satisfac : $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\in\mathbb{N}$.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

Clasa a VII-a

VII.121 Fie O un punct situat în interiorul pătratului $ABCD$ astfel încât $OA=OB$ și $\widehat{OAB}\equiv\widehat{ODA}$. Să se arate că O este centrul pătratului.

Prof. Marina Constantinescu,Tismana

VII.122 Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ cu proprietatea că pentru orice punct M din interiorul său are loc relația $S_{MAB}+S_{MCD}=S_{MBC}+S_{MDA}$. Să se arate că $ABCD$ este paralelogram.
(S_{XYZ} reprezintă aria triunghiului XYZ).

Prof. Marina Constantinescu,Tismana

VII.123 a) Să se determine numerele întregi *x* și *y* pentru care

$$4x^2+3y=24 \text{ și } x+y\geq 0\ ;$$

b) Să se arate că dacă $x,y\in\mathbb{R}$ și $4x^2+3y=24$, atunci $4x+3y\leq 25$;

c) Să se arate că dacă $x,y\in\mathbb{R}$ și $x^2+y^2=25$, atunci $4x+3y\leq 25$.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

VII.124 Se consideră o mulțime $M\subset\mathbb{Q}$ care satisface următoarele proprietăți : a) $1\in M$;

b) $x,y\in M\Rightarrow(5x+4y)\in M$;

c) $(4x+3y)\in M\Rightarrow(x+y)\in M$.

Să se arate că $55\in M$.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

VII.125 Un trapez dreptunghic $ABCD$ $(AB\,//\,CD, AB>CD)$ are o diagonală perpendiculară pe o latură și $m(\hat{B})=30°$. Determinați $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ pentru care $AB=n\cdot CD$.

Prof. Ramona Călin, Reşița

VII.126 Fie $ABCD$ un patrulater convex și punctele $P\in(AD)$ și $Q\in(BC)$, astfel încât $DA=3DP$ și $CB=3CQ$. Arătați că $PQ\leq\frac{AB+2DC}{3}$.

Prof. Ramona Călin, Reşița

VII.127 Să se determine $n\in\mathbb{N}$ pentru care $\frac{2n^2+7}{2n-3}\in\mathbb{Z}$.

Prof. Mihaiela Vizental, Alfred Eckstein, Arad

VII.128 Se consideră numărul $a=\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{15}}+\frac{1}{\sqrt{24}}+\frac{1}{\sqrt{35}}$.

Să se arate că $\frac{19}{20}<a<\frac{25}{24}$.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

VII.129 Să se determine numerele întregi *a,b* pentru care

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{ab}=4.$$

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

Clasa a VIII-a

VIII.121 Scrieți numerele 2008 și 2009 ca diferență de pătrate a două numere naturale.

Prof. Marian Bădoi, Oravița

VIII.122 Se dau mulțimile:

$A=\left\{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,/\,a=\sqrt{6n+2};b=\sqrt{4n+3},n\in\mathbb{N}\right\}$ și

$B=\left\{(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,/\,\left(\sqrt{8}+1\right)x+4=\left(\sqrt{18}+2\right)y-\sqrt{50}\right\}$

Calculați: $A\cup B, A\cap B, A\Delta B$.

Prof. Delia Marinca, Timişoara

VIII.123 Să se determine $a, b, c > 0$ astfel încât $\begin{cases} a+b+c=6 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{2} \end{cases}$

Prof. Marina Constantinescu, Tismana

VIII.124 Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Să se arate că dacă $\widehat{AA'B} \equiv \widehat{CBC'} \equiv \widehat{D'C'A'}$ atunci paralelipipedul este cub.

Prof. Marina Constantinescu, Tismana

VIII.125 Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi $M \in [AA'], N \in [BC]$, $P \in [C'D']$ astfel încât triunghiul MNP este echilateral. Să se arate că $A'M = BN = C'P$.

Prof. Mircea Constantinescu, Tg-Jiu

VIII.126 Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}+\ldots\ldots\ldots+\frac{x+n}{n+1}=n$.

Prof. Ramona Călin, Reşiţa

VIII.127 Se consideră $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $9x^2 + y^2 + 9z^2 = 18(x - 2z - 2)$. Să se determine valoarea maximă a expresiei $E(x, y, z) = 3x + 2y + z$.

Prof. Ramona Călin, Reşiţa

VIII.128 Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$ în care *M* este mijlocul lui *(CD)*, *N* este mijlocul lui $(A'D')$ şi *O* centrul cubului.Să se determine măsura unghiului dintre dreptele *MN* şi *AO.*

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

VIII.129 Fie $\Delta\ ABC$ dreptunghic cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$ şi $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât $EF \| BC$ şi $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$. Se dă $AB = \frac{15}{2}$ şi $AC = 10$. Triunghiul ABC se îndoaie după dreapta EF astfel încât $(AEF) \perp (BEC)$. Aflaţi perimetrul $\Delta\ ABC$ după îndoire .

Prof. Ramona Călin, Reşiţa

Clasa a IX-a

IX.121 Se consideră o mulţime infinită *A* de numere reale cu proprietatea că suma oricăror 2008 numere distincte din *A* este număr raţional. Să se arate că $A \subset \mathbb{Q}$.

Prof. Mircea Constantinescu, Tg-Jiu

IX.122 Să se determine funcţia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ pentru care

$$1 \cdot f^2(1) + 2 \cdot f^2(2) + \ldots + n \cdot f^2(n) = \frac{f^2(n) \cdot [f(n)+1]^2}{4},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

IX.123 Se consideră o mulţime $G \subset \mathbb{R}$ care satisface proprietăţile :

a) $1 \in G$; b) $x \in G \Rightarrow \sqrt{x+3} \in G$; c) $\sqrt{x+4} \in G \Rightarrow (x+5) \in G.$

Să se precizeze dacă există cel puţin patru numere întregi şi patru numere iraţionale care sunt elemente ale mulţimii *G.*

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oţelu - Roşu

IX.124 Determinaţi numerele naturale *n* cu proprietatea că există numerele întregi a şi *b* astfel încât: $n^2 = a + b$ şi $n^3 = a^2 + b^2$.

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

IX.125 Numerele pozitive x_1, x_2, x_3 satisfac inegalităţile $x_1x_2x_3 > 1$, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} > x_1 + x_2 + x_3$. Să se demonstreze că:

a) nici unul din numerele date nu este egal cu 1;

b) exact unul din numerele date este mai mic ca 1.

* * *

IX.126 Fie *ABC* un triunghi ascuţitunghic cu ortocentrul H. Dacă pentru orice punct *M* din planul triunghiului există relaţia $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MH}$, demonstraţi că *ABC* este triunghi echilateral.

Prof. D.M.Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti

IX.127 Fie *ABCD* un patrulater convex, $M \in (BC)$, $N \in (CD)$ şi $\{P\} = (AM) \cap (BN)$. Demonstraţi că dacă $\frac{BP}{BN} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{AP}{AM}$, atunci patrulaterul dat are două laturi paralele.

Prof. Dan Ştefan Marinescu, Ioan Şerdean , Hunedoara

IX.128 Fie triunghiul *ABC* şi *G* un punct în interiorul său cu proprietatea că există un punct *M* în planul său astfel încât $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Să se arate că *G* este centrul de greutate al triunghiului *ABC*.

Prof. Dan Ştefan Marinescu, Viorel Cornea , Hunedoara

IX.129 Fie *ABC* un triunghi, *M* şi *N* mijloacele laturilor (*BC*), respectiv (*AC*) şi $P \in (AB)$ astfel încât $PA = 2\,PB$. Fie $\{G\} = BN \cap AM$ şi $\{Q\} = BN \cap CP$. Dacă $BM.\ BP = BQ.BG$, arătaţi că *AB* este perpendiculară pe *BC* dacă şi numai dacă $AB = BC$.

Prof. D.M.Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti

Clasa a X-a

X.121 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

a) Să se arate că *f* nu este injectivă şi nici surjectivă ;

b) Să se calculeze

$$f\left(\frac{1}{2008}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2007}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) \cdot \frac{1}{f(2)} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{f(2008)}.$$

Dan Emil Bugariu, elev, Oţelu – Roşu

X.122 Să se arate că dacă $z \in \mathbb{C}$ satisface $0 \le \mathrm{Re}(z) \le 2$ şi $0 \le \mathrm{Im}(z) \le 2$, atunci $|z-1-i| \le 1$.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oţelu - Roşu

X.123 Să se rezolve ecuaţia $33^x + 70^x + 92^x = 105^x$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

X.124 Se consideră o mulţime $M \subset \mathbb{C}$ care satisface proprietăţile :

a) $(1+i) \in M$;

b) $z \in M \Rightarrow z^2 \in M$;

c) $(1+z) \in M \Rightarrow z \in M$.

Să se arate că $-4 \in M, 4 \in M, (-4+4i) \in M$.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oţelu - Roşu

X.125 Rezolvaţi ecuaţia : $x^{\log_2 3} = 1 + x$.

Prof. Dorel Miheţ, Timişoara

X.126 Să se rezolve ecuaţia : $\log_4\left(x^4 - 4x + 5\right) = \frac{x}{x^2+1}$.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oţelu - Roşu

X.127 Dacă $a, b, c \in (1, \infty)$, arătaţi că

$$\log_a{}^4 b + \log_b{}^4 c + \log_c{}^4 a \ge \log_a b + \log_b c + \log_c a.$$

Prof. Steluţa şi Mihai Monea, Deva

X.128 Fie $A = \left\{z \in \mathbb{C} / z = x + i \cdot 2^x, x \in \mathbb{R}\right\}$.

a) Arătaţi că $\exists z_1, z_2, z_3 \in A$ astfel încât afixele lor să fie vârfurile unui triunghi isoscel ;

b) Arătaţi că $\forall z_1, z_2, z_3 \in A$ afixele lor nu pot fi vârfurile unui triunghi echilateral.

Prof. Dan Ştefan Marinescu, Ioan Şerdean , Hunedoara

X.129 Fie $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$. Arătaţi că:

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$:; $\left|1-z^2\right| + \left|1+z^3\right| + \ldots + \left|1-z^{2n}\right| + \left|1+z^{2n+1}\right| \ge n \cdot |1+z|$

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $|\sin 2\alpha| + |\cos 3\alpha| + \ldots + |\sin 2n\alpha| + |\cos(2n+1)\alpha| \ge n \cdot |\cos\alpha|$.

Prof. Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

Clasa a XI-a

XI.121 Fie $a,b>0,n\in\mathbb{N},n\geq 2$ şi $M_n(a,b)$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul n având toate elementele din mulţimea $\{a,b\}$. Dacă $\det(A)\geq 0,\forall A\in M_n(a,b)$ să se arate că $a=b$.

Prof. Mircea Constantinescu, Tg-Jiu

XI.122 Să se determine locul geometric al punctelor *M* din planul pătratului *ABCD* pentru care $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=3\cdot AB^2$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

XI.123 Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $X^4-X^3=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

XI.124 Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin

$x_0>0, x_{n+1}\cdot x_n=1+x_n^{\,2},\forall n\in\mathbb{N}$. Să se calculeze $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^{\,2}}{n}$.

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

XI.125 Se consideră matricea $A\in M_n(\mathbb{C}),n>2$ şi ecuaţiile $X^k=O_n$, $AX=A+X$ şi $A+X+X^2+...+X^{k-1}=O_n$, unde $k\in\mathbb{N},k\geq 2$ şi $X\in M_n(\mathbb{C})$. Să se arate că orice soluţie $B\in M_n(\mathbb{C})$ a două dintre ecuaţiile date, este soluţie şi pentru cea de-a treia ecuaţie.

Prof. D.M.Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti

XI.126 Se consideră $A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $BC=I_n$ şi funcţiile $f,g:M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$ pentru care $(f\circ g)(X)=A\cdot g(X)+f(X)\cdot B$, $\forall X\in M_n(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă f este injectivă, atunci g este injectivă.

Prof. D.M.Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti

XI.127 Fie $A\in M_2(\mathbb{R})$ cu $\det A\geq 1$ şi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*},(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*},(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix},n\geq 1$. Să se arate că dacă cele patru şiruri sunt convergente, atunci $A=I_2$.

Prof.Marian Andronache, Bucureşti

XI.128 Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $x_1=1$, $(n+1)(x_{n+1}-x_n)\geq 1+x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ este nemărginit .

Prof. Mircea Lascu, Zalău

XI.129 Arătaţi că orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $x_0>0,x_{n+1}\cdot x_n-2x_n=3,\forall n\in\mathbb{N}$, este convergent.

Prof. D.M.Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti

Clasa a XII-a

XII.121 Să se arate că $\int_0^1 x^2e^{x^2}dx\leq\dfrac{e}{4}$.

Prof. Marina Constantinescu,Tismana

XII.122 Să se arate că $\int_1^3\dfrac{2x^3-x^2+8x+9}{x^4+12x-5}dx=\dfrac{\pi}{8}+\ln 7$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

XII.123 Să se determine $\int\dfrac{\sin^{2008}x}{(1+\cos x)^{2009}dx},x\in(0,\pi)$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

XII.124 Să se arate că pentru orice $x\in\mathbb{N}$, numărul $a=(x^7+x+1)^{23}-x^9$ se divide prin $b=x^7+1$.

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

XII.125 Se consideră funcțiile continue $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac $f(x+3) + 2 \cdot f(4-x) = g(x+3), \forall x \in \mathbb{R}$. Dacă $\int_1^6 f(x)dx = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\int_1^6 g(x)dx$.

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

XII.126 Fie $(G, \cdot)$ un grup finit de ordin n și $f : G \to G$ un morfism cu proprietățile: a) $f \circ f = \mathbf{1}_G$; b) $f(x) = x \Rightarrow x = e$. Să se arate că:

1) $\{f(x) \cdot x^{-1} / x \in G\} = G$; 2) G este abelian; 3) n este impar.

Prof. Dorel Miheț, Timișoara

XII.127 Fie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o funcție bijectivă. Să se studieze dacă există funcții $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ care admit primitive pe $\mathbb{R}$ și satisfac relația $g \circ g = f$.

Prof. Adriana și Lucian Dragomir, Oțelu - Roșu

XII.128 Să se găsească primitivele funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x \cdot e^x}{\sqrt{1+e^x}}$.

Prof. Dan Ștefan Marinescu, Hunedoara

XII.129 Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și injectivă cu proprietatea că $f(1) = 1$. Demonstrați că dacă există $x_0 \in (0,1)$ astfel încât $f(x_0) \geq 2$, atunci $\int_0^1 e^{f(x)} dx > 2$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu - Roșu

Rubrica rezolvitorilor

Punctaje obținute pentru rezolvarea probemelor din RMCS nr.25
(în paranteză apar punctajele realizate pentru ediția a IV-a a Concursului RMCS)

Clasa a IV-a

Liceul Hercules Băile Herculane (Inst.Alexa Gaiță, Înv. Doina Zah, Înv. Felicia Adriana Laitin, Înv. Mirela Bolbotină)Barbu Cristian 40(160), Burcin Andreea 50(170), Lupșan Corina 60(190), Căpățână Alexandra Maria (40), Velcan Anca (50) ,Vlascu Cătălin 60(190), Nicoară Denisa 60(190),Străinescu Andra 60(190),Vătavu-Pepa Călina 60(190).
Școala Bolvașnița (Inst. Mihaela Goanță) Vălean Robert 30(40), Știrban Simona 20(40),Mihăilescu Flavius (20), Dragu Maria 10(30), Jura Damarius Cătălin (10).
Liceul Pedagogic Caransebeș (Înv. Elena Minea) Szabo Ciprian 60(140).
Școala Romul Ladea Oravița (Înv. Camelia Suru) Balmez Bogdan 60(60), Simu Victor 60(60), Epure Gabriel Vasile 60(60).

Clasa a V-a

Liceul Hercules Băile Herculane (Prof. Constantin Bobotină) Popa Andrei 146(146), Cîrdei Alex-Cosmin 132(132), Urzică Ionuț 146(146), Cernescu Maria 146(146), Moagă Alecsandru 112+60(302), Stanciu Ana-Maria 108+147(305), Gherghina Liviu-Nicu 50(50), Stanciu Ani 110+145(315), Grigorie Denisa Bianca 70+145(215).
Școala Bozovici (Prof.Dochia Radulea)Carban Văsîi Sandra 60(60).
Liceul Pedagogic Caransebeș (Prof. Dorina Humița,Prof. Marița Mirulescu) Benec Emanuela 47(47)Belciu Anemona 60(60), Semenescu Raluca 60(60), Pelin Anitta 40(40), Cocoș Daiana 60(60), Nedelcu Loredana 60(60), Nicoară Ioana 60(60).
Școala Generală 2 Reșița (Înv. Florica Boulescu, prof.Marius Șandru)Neațu Monica 30(148), Ursul Larisa Iasmina 20(40), Ciobanu Anca 10(130), Azap Denisa (40), Vasilovici Camil 10(80).
Școala Romul Ladea Oravița (Inst. Liliana Crăciun,Prof.Camelia Pîrvu) Balmez Andrada-Ioana 107(267), Murgu Teodora 107(187),Trăilă Casian 97)97), Chirciu Cătălina 110(110).
Școala Generală 9 Reșița (Înv.Lidia Adamescu,prof. Irina Avrămescu)

Stefan Andrei 50+70(175),Buşoi Natalia (138),Munteanu Ionuț 90 (248),Mîcnea Alexandra (55),Pepa Nicoleta (55), Boldea Cristina80 (135), Cata Larisa 80(135),Gaiță Nadine 100+80(239),Burghină Vali (48),Antonescu Florina 100(158).

Liceul Gen.Dragalina Oravița(Prof.Aurica Lazarov)Țibulea Andrei 70(70).

Şcoala Generală 1 Oțelu-Roşu (Înv. Luminița Orszari,Prof. Heidi Feil) Szalma Eric 80(110),Toader Răzvan 76(76), Cerna Miruna 70(70), Pândici Cristian Andrei 50(50), Țolea Loredana Oana 117(117), Simescu Larisa Geanina 90(90), Trifu Teodora 117(117), Buzzi Cristian Alexandru 107(107), Dudău Ana-Maria 107(107) .

Şcoala Generală nr.3 Oțelu-Roşu (înv. Irina Cîrstea, Prof. Felicia Boldea) Preda Sebastian Mihai (30),

Liceul Traian Doda Caransebeş (Înv.Violeta Ionescu, Prof. Delia Dragomir, Prof. Janet Miuță Bocicariu)
Iliescu Alexandru 60(199), Jurescu Ioan Cristian 60(60), Nistor Răzvan 50(50), Dodoiu Oana 50(50), Stoicănescu Petru 80(80).

Grup Şcolar Moldova Nouă(Înv. Anastasia Cristina Stroia)
Stănuță Nicolae Eduard (40), Stoleriu Nicolae Denis (90), Anghel Alexandru (40), Toma Monica (40), Costinaş Cristian (40).

Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Stepanescu Maria 138(138), Humița Ionela 127(127), Banda Ioan Alexandru Ilia 65(65), Gherga Ana 92(92), Radu Alexandru Ionuț 103(103), Stepanescu Alina Iconia 92(92).

Clasa a VI-a

Liceul Hercules Băile Herculane(Prof. Constantin Bolbotină, prof. Marius Golopența) Bălaj Denisa Maria 182(182), Şandru Ilie Daniel 206(460), Gherghina Liviu 130(200) , Dancău Anca Ionela 130+74(252), Dimcea Alexandra Ana Maria 130+70(310), Coman Petre Daniel 130+60(287), Török Bogdan 50(110), Mihart Georgiana 175+80(335), Ferescu Liana 116(196), Vlaicu Dana 50(107),Şuşară Bianca (88), Croitoru Sabina 182(182): **probleme cu logaritmi, clasa a X-a !?,** Domilescu Manuel 110+50(160): bun băiat, a trimis un plic pentru altcineva, adică l-a ajutat(serios vorbim).

Şcoala Berzasca (Prof. Dana Emilia Schiha) Vulpescu Iulia (236).

Şcoala Bozovici (Prof.Maria Bololoi) Mitocaru Patricia 106(375), Iancu Mara-Timea (110), Ruva Mihaela 106(340), Pervu Georgiana (110), Nicola Ion Cristian (60),Hânda Mihai (110).

Liceul Eftimie Murgu Bozovici (Floarea Haramuz-Şuta)Dancea Nicolae

(212),Drăgilă Ioan Marian (197), Suveți Anca Marinela (211).

Şcoala Ciclova Română (Prof. Geta Mîşcoi) Crăciunel Vilușu 40(63), Munteanu Andreea 80(118), Muia Diana (38).

Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Maria Crasnianic)Toma Alexandru 60(60).

Şcoala Generală Dalboşeț (Prof.Pavel Rîncu) Țunea Lia (64),Motorga Elisa Mirela 50(115).

Şcoala Generală nr. 6 Reşița (Prof. Susana Simulescu) Ciulu Miruna Dalila 120(470).

Liceul de Artă Reşița (Prof. Adriana Mara) Petraşcu Nicoleta 70(70).

Şcoala Generală nr. 9 Reşița (Prof. Ion Belci,Prof.Irina Avrămescu) Peptan Andrei Valentin 60(326),Pangica Antonio 126(251):***fără talon, fără clasă,am căutat prea mult!*** **Vă rugăm, respectați condițiile de trimitere a soluțiilor !!!!**,Bercean Bogdan Alexandru 136(395*)(vai ce ne-am chinuit să descoperim în ce clasă eşti!; mulțumim oricum pentru foile albe – goale puse în plic).*

Şcoala Generală nr. 1 Oravița (Prof. Mariana Iancu, Prof. Marian Bădoi) Gheorghişan Călin 120(445), Dănilă Mădălina 123(529),Pîrvu Ancuța 172(172)..

Şcoala Generală 3 Oțelu-Roşu (Prof. Daniela Suciu, Prof. Felicia Boldea) Băilă Cristina 60(150),Românu Nicoleta 68 (158), Barbu Daniel 30(114),Manea Florina (122), Dulan Ioniță (80),Preda Cristina 30(107), Vladu Alina 68(193), Lazăr Răzvan Ionuț 56(179),Haba Beatrice 30(30).

Şcoala Generală 1 Oțelu-Roşu (Prof. Heidi Feil)
Guțan Iuliana (284), Buță Laurian-Paul 107(374), Ştefănescu Andrei 170(555), Raț Laura(70),Iamandei Daiana (197),Roşu Ionuț (60),Trica Alexandru 60(140).

Grup Şcolar Oțelu-Roşu (Prof. Iulia Cecon) Olaru Ionuț 30(177), Roi Karmina (70), Pascu Dalida (50).

Liceul Pedagogic Caransebeş (Prof. Dorina Humița, Prof. Antoanela Buzescu) Bivolaru Iulia Mălina 90(330), Băzăvan Răzvan Alexandru (90), Băzăvan Oana Cătălina (97), Dinulică Petru Augustin 140(460), Dinulică Septimiu 140(460),Dragomir Roberto (80).

Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Stepanescu Georgeta (72),Oprişan Cristina (42),Blaj Ioan 78(163),Moacă Nicolae 62(207).

Şcoala Topleț (Prof. Simion Roman) Ciucă Octavian 114 (114).

Clasa a VII-a

Şcoala Anina (Prof. Marin Cleşiu) Paiu Andrada 20(20).
Şcoala Bănia (Prof.Iancu Cleşnescu) Odobaşa Daniel (107).
Şcoala Bozovici (Prof. Iosif Găină , Maria Bololoi,Dochia Rădulea) Vrancea Andreea 90(303), Ştefan Ana 60(120), Munteanu Mădălina 59(140), Holbotă Viorica (97),Beloescu Cristina (107), Hotac Adina 53(213).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Dorina Humiţa) Ban Ioana 58(118), Stanciu Georgiana Maria (40).
Şcoala Generală Dalboşeţ (Prof. Pavel Rîncu) Băcilă Alexandru (50), Careba Denisa (56).
Şcoala Lăpuşnicu Mare (Prof. Petru Pungilă) Goşa Violeta 60(60), Vodă Andreea 50(50).
Grup Şcolar Moldova Nouă(Prof. Vasilica Gîdea) Paunovici Veronica 28(28),Oprea Adelina 38(148), Tarsoly Carla 40(130), Beloia Marinela 40(90).
Şcoala Generală 2 Reşiţa (Prof. Mariana Drăghici) Ţeudan Adina 50(260), Popa Andreea (100), Onofrei Iulia 40(198), Drăghici Livia Liliana 110(400),Aghescu Monica Elena 110(320).
Şcoala Generală nr. 9 Reşiţa (Prof. Irina Avramescu ,Prof.Vasile Chiş, Prof. Ion Belci) Peptan Alexandru 90+135 (468), Colgea Alexandru 70(1300), Lazăr Silviu Ioan 80(410), Muscai Lorena 75(135).
Liceul Gen.Dragalina Oraviţa (Prof. Mihai Lazarov) Sava Isabella (58).
Şcoala Romul Ladea Oraviţa (Prof. Camelia Pîrvu, Prof. Minodora Savu) Marocico Flavius (30), Serafin Dennis George 56(196).
Şcoala Generală 1 Oţelu-Roşu (Prof. Heidi Feil, Prof. Anişoara Popa) Pop Cristian Ionuţ 106(286), Radu Ionela 60(262), Tuştean Patricia 70(170), Boran Cristian (40), Alexa Alexandra (160), Bidilici Răzvan (90), Ilic Denis 36(36).
Şcoala Generală 3 Oţelu-Roşu (prof.Felicia Boldea)Cărăuşu Robert 50(248), Băilă Diana 60(222) ,Tănasă Raul 50(224), Preda Gabriela Dagmar 47(282), Mihuţ Marius Cosmin (107).
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu (Prof. Iulia Cecon) Vărgatu Alina (70), Popescu Ana Maria (70),Călău Maria 104(154).
Şcoala Vîrciorova (Prof.Ioan Liuba) Turnea Ion (70).
Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Humiţa Ileana 84(132),Humiţa Maria (30), Humiţa Cosmin 94(124),Ursulescu Ionela 145(145), Banda Elisabeta 87(87).

Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Florin Ciocan) Szabo Ildiko 150(150).
Grup Şcolar Construcţii Maşini Caransebeş (Prof. Sebastian Corîci) Bădescu Patricia Liana 70(230), Abagiu Şelner Raluca 70(70).

Clasa a VIII-a

Şcoala Bozovici (Prof. Iosif Găină)Barbeş Cezara 50(244), Nicola Alexandra 50(242), Băcilă Cristiana 50(226), Curescu Elena Cristina 50(166), Bratosin Felix 40(40) .
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Adrian Dragomir) Stoicănescu Gelu 50(260).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Mariţa Mirulescu) Timofte Tina 50(168),Benec Sînziana 50(50).
Şcoala Generală Dalboşeţ (Prof. Pavel Rîncu) Jarcu lorena Maria 54(134), Marin Lidia Mădălina (58),Drăgilă Cătălin Sebastian 50(110),Căpăţînă Dana Maria (57).
Liceul Hercules Băile Herculane(Prof.Marius Golopenţa)Tabugan Dana (120).
Grup Şcolar Moldova Nouă(Prof. Vasilica Gîdea) Păunovici Rebeca (40).
Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Codoşpan Florinela 107(230), Davidescu Toma 17(31), Blaj Marinela (57), Humiţa Maria 75(171), Banda Traian Daniel 72(72).
Şcoala Generală 2 Reşiţa (Prof. Mariana Drăghici) Pascu Andra Diana 40(180), Hulban Gabriel Adrian 118(118).
Şcoala Generală 1 Oţelu-Roşu (Prof. Heidi Feil)Krokoş Lorena 76(313), Kuhn Anne Marie 76(313).
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu (Prof. Adriana Dragomir) Dumitresc Cecilia 60(176), Nasta Laura 60(176).
Şcoala Vîrciorova (Prof. Ioan Liuba) Măran Marius 60(160).

Clasa a IX-a

Şcoala Bozovici (Prof. Maria Bololoi) Borchescu Anamaria (60), Borozan Florina (48).
Liceul Eftimie Murgu Bozovici (Prof. Dănilă Berbentea) Derlean Pavel 26(168)
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Delia Dragomir, Prof. Lavinia Moatăr) Mocanu Ioana 58(267), Paşan Petru (210),Matei Sergiu 53(100).

Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Dorina Humiţa, Prof. Antoanela Buzescu) Semenescu Anca 70(297),Borcean Gheorghe (50), Magu Georgiana 43(43).
Grup Şcolar Oţelu-Roşu (Prof. Lucian Dragomir)Duma Andrei Florin 23(144), Tuştean Claudiu 25(87), Buliga Adrian Denis 35(92),Bugariu Timeea 23(85),Bugariu Răzvan 14(86).
Liceul Gen.Dragalina Oraviţa (Prof.Mihai Lazarov)Goian Raluca Mădălina 10(10).

Clasa a X-a

Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Delia Dragomir,Iacob Didraga) Vizicicanici Mihaela 65(65), Stolojescu Iasmina 58(58),Zanfir Cristian 136(136), Bona Petru 116(252), Prunar Victor 156(461),Hurduzeu Iconia 116(246), Todor Elena 86(156),Galescu Dan 96(96),Ciucă Cristian Sorin 76(76),Szabo Cristian 68(68).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Antoanela Buzescu) Marta Marian Sebastian 60(238).
Liceul Traian Lalescu Reşiţa (Prof. Ovidiu Bădescu) Simion Larisa (60), Popovici Georgian (87), Meşter Sergiu 36(145).
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu (Prof. Lucian Dragomir)Atinge Carina 73(172), Cococeanu Oana 56(200),Ştefănigă Sebastian 42(140), Bărângă Sergiu 53(53).
Liceul Gen.Dragalina Oraviţa(Prof.Mihai Lazarov) Pricop Romina 26(189), Persu Daniel 6(31).
Grup Şcolar Moldova Nouă(Prof. Lăcrimioara Ziman) Istudor Deian 48(93),Vireanu Adelina 45(45), Calotă Bianca 45(45), Radoicovici Iasmina 45(45), Harabagiu Dragana Gabriela 18(18), Marişescu Flavius 43(43).

Clasa a XI-a

Colegiul Naţional Moise Nicoară Arad (Prof. Ovidiu Bodrogeanu) Adina Vlad 68(135)
Liceul Tata Oancea Bocşa (Prof.Ioan Todor) Stăniloiu Ovidiu 60(228).
Liceul Hercules Băile Herculane(Prof.Constantin Bolbotină) Stolojescu Anca 65(115).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Lavinia Moatăr) Moatăr Alexandra 50(110), Jdioreanţu Doriana 28(55), MiculescuMatei 48(95), Colţan Călin 35(82), Blidariu Florentina 38(90), Timofte Andrei 38(85), Megan Ligia 56(116), Milcu Roxana 50(158), Enăşel Ion 38(95),

Dumitrescu Otilia 37(84), Ciobanu Claudiu 38(85), Humiţa Gheorghe 45(87), Stefan Emanuel 37(84), Carabin Claudia 38(85),Neamţiu Nicoleta 38(85),Babeu Nicolae 28(66), Bîrsan Mirela 38(95),Muntian Adriana 38(85),Săbăilă Marius 46(93),Blidariu Florentina (55),Voinea Alexandra (40),Hromei Diana (57),Teodorescu Silviu Petru 38(76), Stoica Georgian 10(10),Daia Daniela 36(36), Lazăr Ioan 36(36), Vornic Iosif Adrian 46(46),Turcan Vlad 38(38),David Bogdan 38(38).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Antoanela Buzescu)Mureşan Ana-Maria 60(150), Mureşan Alexandru Ioan 60(150).
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Lavinia Moatăr, Prof. Iacob Didraga)Ţiu Mihai Nicanor 27(55), Bălulescu Bianca Veronica 27(67), Galamba Ionel Marinel 43(91), Aghescu Alina Mihaela 30(57), Cristescu-Loga Cerasela (58), Ionaşcu Simona 30(75), Florea Maria Adelina (27), Turnea Ana-Maria 30(75), Negrei Mihaela (45), Stolojescu Oana 30(75), Turnea Adasena (50),Train Anca 67(117),Rotaru Nicolae (27), Toth Lavinia (28),Cornean Luiza 30(30),Blidariu Mihaela 30(30),Firan Maria Mirabela 30(30),Serbescu Cristina 30(30).
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu (Prof. Lucian Dragomir) Bugariu Dan 82(202), Lupu Vlad (50), Moisescu Mihaela (30),Damian Raluca (70).

Clasa a XII-a

Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Lavinia Moatăr) Gurgu Caius (30), Kremer Emanuela (30), Iliescu Marcel (30), Ciortan Marius (30).
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu (Prof. Lucian Dragomir)
Unguraş Dragoş 30(160), Buzuriu Alina (30), Dragomir Lucia (30),
Beg Apostol (30).
Liceul Gen.Dragalina Oraviţa(Prof.Mihai Lazarov) Nezbeda Harald 51(105).

Colectivul de redacţie al revistei pe care o răsfoiţi cu plăcere şi o aşteptaţi cu nerăbdare, adică revista de faţă, vă urează *Sărbători Fericite, La Mulţi Ani!,* o vacanţă cât mai odihnitoare alături de cei dragi. Acelaşi colectiv speră ca în clipele când doriţi să vă umpleţi timpul liber şi cu plăceri intelectuale, să vă ocupaţi puţin măcar şi de matematică... Cele mai alese gânduri se îndreaptă către voi!